

František Koutný

Algorithms. 37. RADIX. Numerische Lösung der Gleichung  $f(t) = 0$  mit Hilfe der quadratischen Interpolation

*Aplikace matematiky*, Vol. 19 (1974), No. 4, 290--292

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103542>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1974

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

37. RADIX

NUMERISCHE LÖSUNG DER GLEICHUNG  $f(t) = 0$   
MIT HILFE DER QUADRATISCHEN INTERPOLATION

FRANTIŠEK KOUTNÝ, prom. mat., VÚGPT, 764 22 Gottwaldov 4

Sei  $f$  eine reelle in Intervall  $I = \langle x_0, x_2 \rangle$  stetige Funktion,

$$(1) \quad f(x_0)f(x_2) < 0.$$

Im folgenden Programm wird eine Wurzel  $\xi$  der Funktion  $f$  in  $I$  gefunden.

Setzen wir

$$x_1 = (x_0 + x_2)/2 \quad \text{und} \quad y_i = f(x_i) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2.$$

Mit  $I' = \langle x'_0, x'_2 \rangle$  wird dasjenige aus den Intervallen  $\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_1, x_2 \rangle$  bezeichnet, in dessen Randpunkten die Funktion  $f$  ihr Vorzeichen wechselt. Weiter sei  $p(t) = at^2 - bt + c$  mit

$$a = y_0 - 2y_1 + y_2,$$

$$b = (x_1 + x_2)y_0 - 2(x_0 + x_2)y_1 + (x_0 + x_1)y_2,$$

$$c = x_1x_2y_0 - 2x_0x_2y_1 + x_0x_1y_2.$$

Als Näherung der Wurzel  $\xi$  wird nun die Wurzel  $x$  des zugehörigen Lagrangeschen Interpolationspolynoms genommen. Dies führt auf die Gleichung  $p(t) = 0$ .

Es sei zunächst  $a \neq 0$ . Dann lässt sich leicht nachweisen, dass

$$(2) \quad x = (b + \text{sign } y_2 \cdot \sqrt{(b^2 - 4ac)})/(2a)$$

die einzige in  $I$  enthaltene Wurzel von  $p$  ist. Es gilt sogar  $x \in I'$ .

Für  $a = 0$  ist  $x = c/b$  die einzige Wurzel von  $p$ . In diesem Fall als auch dann, wenn die Grösse  $m = |a|/(x_2 - x_0)$  klein ist, ist es zweckmässiger die *regula falsi* in  $I'$  zu verwenden:

$$(3) \quad x = (x'_0 f(x'_2) - x'_2 f(x'_0))/(f(x'_2) - f(x'_0)).$$

Bei der Maschienenermittlung nach Formel (2) muss noch die Inklusion  $x \in I'$  verifiziert werden. Falls  $x \notin I'$  ist, so wird (3) verwendet.

Ist  $f(x) = 0$ , so ist offensichtlich  $\xi = x$  zu setzen. Für  $f(x) \neq 0$  lässt sich zwischen den Intervallen  $\langle x'_0, x \rangle$ ,  $\langle x, x'_2 \rangle$  ein solches finden und als  $I'' = \langle x''_0, x''_2 \rangle$  bezeichnen, auf dessen Berandung  $f$  ihr Vorzeichen wechselt. Ist  $\varepsilon$  die vorgegebene Genauigkeit und  $x''_2 - x''_0 < 2\varepsilon$ , so wird  $\xi = x''_1 = (x''_0 + x''_2)/2$  gesetzt. Anderenfalls wird  $x_i = x''_i$  für  $i = 0, 1, 2$  gesetzt und das Verfahren wiederholt.

In jedem Schritt gilt  $x''_2 - x''_0 \leq (x_2 - x_0)/2$ , wodurch die Konvergenz versichert ist. Die Fehlerabschätzung  $|\xi - x| \leq (x_2 - x_0)/2$  lässt sich allgemein nicht verbessern.

Falls die Bedingung (1) nicht erfüllt ist, so ist sinnlos die Wurzel von  $f$  in  $I$  zu suchen. Zum Sprung hinaus auf eine Marke im Hauptprogramm ist der formale Parameter *IRR* bestimmt.

```

procedure RADIX (x0, x2, eps, f, IRR) result: (x1);
value x0, x2, eps; real x0, x1, x2, eps;
real procedure f; label IRR;
begin
real a, b, c, x, y0, y1, y2; boolean K;
  y0 := f(x0); y2 := f(x2); K := sign (y0) = - sign (y2);
  if  $\neg K$  then go to IRR;
N:  x1 := (x0 + x2)/2;
  if  $x_2 - x_1 < \text{eps}$  then go to FIN;
  y1 := f(x1); K :=  $\neg K$ ;
  a :=  $y_0 - 2 \times y_1 + y_2$ ;
  b :=  $(x_1 + x_2) \times y_0 - 2 \times (x_0 + x_2) \times y_1 + (x_0 + x_1) \times y_2$ ;
  c :=  $x_1 \times x_2 \times y_0 - 2 \times x_0 \times x_2 \times y_1 + x_0 \times x_1 \times y_2$ ;
  x := if abs (a)/(x2 - x0) < 0.01 then x1 else
    (b + sign (y2)  $\times$  sqrt (b  $\uparrow$  2 - 4  $\times$  a  $\times$  c))/(2  $\times$  a);
M:  if sign (y0) = sign (y1) then begin x0 := x1; y0 := y1 end
    else begin x2 := x1; y2 := y1 end;
  if K then go to N;
  if  $x \geq x_2 \vee x \leq x_0$  then x :=  $(x_0 \times y_2 - x_2 \times y_0)/(y_2 - y_0)$ ;
  y1 := f(x); x1 := x; K :=  $\neg K$ ;
  if  $y_1 \neq 0$  then go to M;
FIN: end RADIX;

```

Beispiel. Suchen wir die Wurzel der Funktion  $f(t) = \sin t - t/2$  im Intervall  $\langle \pi/2, \pi \rangle$ . In folgender Tafel wird der Verlauf der ersten Schritte angeführt. Die Berechnungen wurden auf der Rechenanlage DATA SAAB D-22 durchgeführt. Als Programmiersprache wurde ALGOL 22 benutzt. Mit Rücksicht auf die Anzahl der gültigen Ziffern (elf) wurde die Wurzelgenauigkeit  $\varepsilon = 10^{-8}$  gewählt. Im Schritt 7 war  $m < 0,01$ , darum wurde in neuem Intervall  $I'$  die Formel (3) angewendet. Die ermittelte Wurzel ist  $\xi = 1,895\,494\,266 \dots$

Tafel

$n$	$x_0$	$\begin{matrix} x_1 \\ x \end{matrix}$	$x_2$
1	1,5707963268	2,3561944902 1,8727886152	3,1415926536
2	1,8727886152	2,1144915527 1,8952779202	2,3561944902
3	1,8952779202	2,0048847365 1,8954938510	2,1144915527
4	1,8954938510	1,9501892937 1,8954942666	2,0048847365
5	1,8954942666	1,9228417802 1,8954942666	1,9501892937
6	1,8954942666	1,9091680234 1,8954942667	1,9228417802
7	1,8954942667	1,9023311450 —	1,9091680234
	1,8954942667	— 1,8954942670	1,9023311450
	1,8954942667		1,8954942670

*Literatur*

- [1] *Ostrowski, A. M.*: Solution of Equations and Systems of Equations (russische Übersetzung). IIL, Moskau 1963.
- [2] *Ralston, A.*: A first Course in Numerical Analysis (tschech'sche Übersetzung). Academia, Prag 1973.