Aplikace matematiky

Josef Matušů

Eine Bemerkung zur Lösung von Differentialgleichungen mit Parametern bei Anwendung der Lie-Reihen

Aplikace matematiky, Vol. 21 (1976), No. 6, 457--462

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103670

SVAZEK 21 (1976) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 6

EINE BEMERKUNG ZUR LÖSUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT PARAMETERN BEI ANWENDUNG DER LIE-REIHEN

JOSEF MATUŠŮ

(Eingegangen 30. März 1976)

Im Jahre 1960 erschien das Buch von Professor Dr. Wolfgang Gröbner: Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. Hier wurde erstmals systematisch eine auf Sophus Lie zurückgehende Theorie aufgebaut, die in verschiedenen Zweigen der mathematischen Analysis fruchtbare Anwendungsmöglichkeiten bietet. In diesem kurzen Aufsatz wird gezeigt, wie man Lie-Reihen, die eine Verallgemeinerung der Taylorschen und Lagrangeschen Reihe darstellen, zur Lösung von Differentialgleichungen mit Parametern anwenden kann. In allen Fällen weiss man seit mehr als 100 Jahren, dass die Lösungen solcher Differentialgleichungen, die mit holomorphen Funktionen gebildet sind, existieren, dass sie holomorphe Funktionen der betreffenden Variablen sind und das keine anderen Lösungen existieren. Zugleich mit diesen Existenzbeweisen wurden auch Anleitungen gegeben, wie man die Koeffizienten der regulären Potenzreihen, durch welche die Lösungen eindeutig bestimmt sind, schrittweise berechnen kann. Auch die Lie-Reihen geben zunächst eine derartige Anweisung, aber sie liefern darüber hinaus eine einfache und übersichtliche Gestalt dieser Potenzreihen, die allgemein gültig ist und mit der man in geschlossener Form weiter operieren kann.

Wir gehen zu unserem Problem über.

Es sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}Z_i}{\mathrm{d}t} = \vartheta_i(\boldsymbol{Z}; t; \boldsymbol{\mu}) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

vorgelegt. Durch das Symbol $\boldsymbol{\mu}$ sind $s - 1$ ($s \geqq 2$ ganzzahlig) Parameter $\mu_1, \ldots, \mu_{s-1}$ repräsentiert; sie sind im Allgemeinen komplex. Wir betrachten die Lösung des Systems (1), die für $\boldsymbol{\mu} = 0$ den Anfangsbedingungen

$$(Z_i)_{t=0} = z_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1'}$$

genügt. Bezüglich der Funktionen $\vartheta_i(\boldsymbol{Z}; t; \boldsymbol{\mu})$ der Variablen $Z_1, \ldots, Z_n; t; \mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_{s-1}$ setzen wir voraus, dass sie in einer gewissen Umgebung der Stelle $\{z_1, \ldots$ $\ldots, z_n; 0; 0, \ldots, 0\}$ holomorph sind. Wir setzen

$$
(2) \qquad \mathfrak{z} = \left\| \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \right\|, \quad \mathfrak{Z} = \left\| \begin{matrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{matrix} \right\|, \quad \Theta(\boldsymbol{Z}; t; \boldsymbol{\mu}) = \left\| \begin{matrix} \vartheta_1(\boldsymbol{Z}; t; \boldsymbol{\mu}) \\ \vdots \\ \vartheta_n(\boldsymbol{Z}; t; \boldsymbol{\mu}) \end{matrix} \right\| .
$$

Mit (2) können dann (1) und (1′) in der Form

$$
(1'') \qquad \frac{\mathrm{d}\mathfrak{Z}}{\mathrm{d}t} = \Theta(\boldsymbol{Z}; t; \boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} ,
$$

$$
(1''') \qquad (\mathfrak{Z})_{t=0} = \mathfrak{z}
$$

geschrieben werden. Ist nun $\mathfrak{Z}$ die Lösung von (1″), die für $\boldsymbol{\mu} = 0$ der Anfangsbedingung (1‴) genügt, dann genügt wie bekanntlich die Ableitung $\partial \mathfrak{Z}/\partial \mu_k$ nach dem Parameter μ_k $(k = 1, \ldots, s-1)$ der Gleichung

$$
(3) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu_k}\right) = \frac{\partial \Theta}{\partial \boldsymbol{Z}} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu_k} + \frac{\partial \Theta}{\partial \mu_k} ,
$$

wobei

$$
\frac{\partial \Theta}{\partial \boldsymbol{Z}} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial Z_1} & \cdots & \dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial Z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \vartheta_n}{\partial Z_1} & \cdots & \dfrac{\partial \vartheta_n}{\partial Z_n} \end{matrix} \right\| , \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \mu_k} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \vartheta_i}{\partial \mu_k} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \vartheta_n}{\partial \mu_k} \end{matrix} \right\|
$$

mit

$$
(3') \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu_k}\right)_{t=0} = 0 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| .
$$

Wir wollen annehmen, dass die Lösung (z. B. in Form der Lie-Reihe)

$$
\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu_k} = {}_{\mu_k}\mathfrak{f}(t; \boldsymbol{\mu}) = \left\| \begin{matrix} {}_{\mu_k}f_1(t; \boldsymbol{\mu}) \\ \vdots \\ {}_{\mu_k}f_n(t; \boldsymbol{\mu}) \end{matrix} \right\|
$$

von (3), die der Anfangsbedingung (3′) genügt, bekannt ist; es kann vorkommen, dass (3) einfacher zu lösen ist als (1). Wir setzen

$$
(5) \qquad t = t_1 , \quad \mu_1 = t_2, \ldots, \mu_{s-1} = t_s ,
$$

ferner sei (sieh (1), (4))

$$\vartheta_i(\mathbf{Z}; t; \boldsymbol{\mu}) = \vartheta_{1i}(\mathbf{Z}; t_1, \ldots, t_s) = \vartheta_{1i}(\mathbf{Z}; t)\,, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} {}_{\mu_k}f_i(t; \boldsymbol{\mu}) = {}_{t_{k+1}}f_i(t_1, \ldots, t_s) = f_{k+1,i}(t) \\ (i = 1, \ldots, n;\, k = 1, \ldots, s-1)\,; \end{gathered} \tag{7}$$

mit dem Symbol t auf den rechten Seiten ist das s-tupel $t_1, \ldots, t_s$ gemeint. In Matrixform sei also

$$\Theta(\mathbf{Z}; t; \boldsymbol{\mu}) = \Theta_1(\mathbf{Z}; t)\,, \tag{6'}$$

$$\begin{gathered} {}_{\mu_k}\mathfrak{f}(t; \boldsymbol{\mu}) = \mathfrak{f}_{k+1}(t) \\ (k = 1, \ldots, s-1)\,. \end{gathered} \tag{7'}$$

Wenn wir die Gleichungen (4) (für $k = 1, \ldots, s-1$) zur Gleichung (1″) beifügen, dann erhalten wir das System (sieh (5), (6′), (7′))

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t_1} = \Theta_1(\mathbf{Z}; t)\,, \\ \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t_{k+1}} = \mathfrak{f}_{k+1}(t) \quad (k = 1, \ldots, s-1)\,, \end{gathered} \tag{8}$$

dessen Lösung $\mathfrak{Z}$ der Anfangsbedingung (sieh (1‴))

$$(\mathfrak{Z})_{t_1 = \ldots = t_s = 0} = \mathfrak{z} \tag{8'}$$

genügen soll.

Um die gesuchte Lösung in Form einer Lie-Reihe erhalten zu können, müssen wir nun zeigen, dass für die Gleichungen des Systems (8) die sog. Verträglichkeitsbedingungen (sieh [1]) erfüllt sind.

Für $j \neq 1$ ist (sieh (8))

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_j}\Theta_1(\mathbf{Z}; t) = \frac{\partial \Theta_1}{\partial \mathbf{Z}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t_j} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial t_j} = \frac{\partial \Theta_1}{\partial \mathbf{Z}}\mathfrak{f}_j(t) + \frac{\partial \Theta_1}{\partial t_j}\,. \tag{9}$$

umgekehrt ist (sieh (8), (7′), (5), (4), (3), (6′))

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t_j} &= \frac{\partial}{\partial t_1}\mathfrak{f}_j(t) = \frac{\partial}{\partial t}\,{}_{\mu_{j-1}}\mathfrak{f}(t; \boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu_{j-1}}\right) = \\ &= \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{Z}}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mu_{j-1}} + \frac{\partial \Theta}{\partial \mu_{j-1}} = \frac{\partial \Theta_1}{\partial \mathbf{Z}}\mathfrak{f}_j(t) + \frac{\partial \Theta_1}{\partial t_j}\,. \end{aligned} \tag{9'}$$

Aus (9), (9′) folgt also die Gleichheit der betrachteten gemischten Ableitungen. Dass auch die übrigen gemischten Ableitungen 2. Ordnung einander gleich sind, folgt unmittelbar aus der Holomorphie der Funktionen $\mathfrak{f}_{k+1}(t)$ (sieh (8)) in der Umgebung der Stelle $t_1 = \ldots = t_s = 0$. Damit ist die Gültigkeit der Verträglichkeitsbedingungen bewiesen.

Die dem System (8) entsprechenden kommutativen Differentialoperatoren, mit welchen die gesuchte Lösung von (1″), (1‴) in Form einer s-dimensionalen Lie-Reihe ausgedrückt ist, sind dann

$$(10) \qquad D_1 = \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \vartheta_{1p}(z;\tau)\frac{\partial}{\partial z_p} = \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \vartheta_p(z;\tau)\frac{\partial}{\partial z_p},$$

$$(10') \qquad D_{k+1} = \frac{\partial}{\partial \tau_{k+1}} + f_{k+1,p}(\tau)\frac{\partial}{\partial z_p}$$

$$(k = 1, \ldots, s-1);$$

in (10), (10′) wird über p von 1 bis n summiert.

Mit Hilfe von Satz 21 (sieh [1]) folgt schliesslich der folgende

Satz. *Die Lösung des Gleichungssystems* (1), *die für* $\mu = 0$ *den Anfangsbedingungen* (1′) *genügt, kann bei Berücksichtigung der Holomorphiebedingungen in Form einer s-dimensionalen Lie-Reihe* (*sieh* (5))

$$(11)) \qquad Z_i = \left(e^{t_1 D_1 + \ldots + t_s D_s} z_i\right)_{\tau_1 = \ldots = \tau_s = 0} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s}^{0,\ldots,\infty} \frac{t_1^{\nu_1} t_2^{\nu_2} \ldots t_s^{\nu_s}}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_s!}\left[D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2} \ldots D_s^{\nu_s} z_i\right]_{\tau_1 = \ldots = \tau_s = 0} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s}^{0,\ldots,\infty} \frac{\mu_1^{\nu_2} \ldots \mu_{s-1}^{\nu_s}}{\nu_2!\ldots\nu_s!}\left\{\frac{t^{\nu_1}}{\nu_1!}\left[D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2} \ldots D_s^{\nu_s} z_i\right]_{\tau_1 = \ldots = \tau_s = 0}\right\},$$

die mit den Differentialoperatoren (10), (10′) *gebildet ist, ausgedrückt werden. Diese Lösung ist durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt.*

Beispiel. Um in die oben angeführten Ausführungen gute Einsicht zu gewinnen, sei die sehr einfache Differentialgleichung

$$(12) \qquad \frac{dZ}{dt} = Z - \cos\mu$$

vorgelegt, μ komplex. Für $\mu = 0$ betrachten wir die Lösung von (12), die der Anfangsbedingung

$$(12') \qquad (Z)_{t=0} = 1$$

genügt. Zu diesem Zweck bilden wir nach (8) das System

$$(13)\qquad \frac{\partial Z}{\partial t_1} = Z - \cos t_2\,,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t_2} = e^{t_1}\sin t_2 - \sin t_2\,,$$

dessen Lösung Z der Anfangsbedingung

$$(13')\qquad (Z)_{t_1=t_2=0} = 1$$

genügt. Die Differentialoperatoren D_1, D_2, die dem System (13) entsprechen, sind nach (10), (10')

$$(14)\qquad D_1 = \frac{\partial}{\partial \tau_1} + (z - \cos\tau_2)\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

$$(14')\qquad D_2 = \frac{\partial}{\partial \tau_2} + (e^{\tau_1}\sin\tau_2 - \sin\tau_2)\,.$$

Nach (11) kann dann die Lösung der Gleichung (12), die für $\mu = 0$ der Anfangsbedingung (12') genügt, in Form der Lie-Reihe mit den Operatoren (14), (14') ausgedrückt werden:

$$(15)\qquad Z = (e^{t_1D_1+t_2D_2}z)_{\tau_1=\tau_2=0} =$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2}^{0,\dots,\infty}\frac{t_1^{\nu_1}t_2^{\nu_2}}{\nu_1!\,\nu_2!}[D_1^{\nu_1}D_2^{\nu_2}z]_{\tau_1=\tau_2=0} = \sum_{\nu_1,\nu_2}^{0,\dots,\infty}\frac{t^{\nu_1}\mu^{\nu_2}}{\nu_1!\,\nu_2!}[D_1^{\nu_1}D_2^{\nu_2}z]_{\tau_1=\tau_2=0} =$$

$$= 1 + \sum_{\nu_1,\nu_2}^{1,\dots,\infty}\frac{t^{\nu_1}\mu^{\nu_2}}{\nu_1!\,\nu_2!}[D_1^{\nu_1}D_2^{\nu_2}z]_{\tau_1=\tau_2=0}\,.$$

Durch einfache Rechnung überzeugt man sich, dass $D_1^{\nu_1}D_2^{\nu_2}z = -e^{-\tau_1}\cos(\tau_2 + \nu_2\pi/2)$ für $\nu_1, \nu_2 \geqq 1$, sodass $[D_1^{\nu_1}D_2^{\nu_2}z]_{\tau_1=\tau_2=0} = -\cos(\nu_2\pi/2)$. Es ist dann

$$(15')\qquad Z = 1 - \sum_{\nu_1,\nu_2}^{1,\dots,\infty}\frac{t^{\nu_1}\mu^{\nu_2}}{\nu_1!\,\nu_2!}\cos\frac{\nu_2\pi}{2} =$$

$$= 1 - \sum_{\nu_1,\nu_2}^{1,\dots,\infty}\frac{t^{\nu_1}}{\nu_1!}\frac{\mu^{2\nu_2}}{(2\nu_2)!}(-1)^{\nu_2} = 1 - (e^t - 1)(\cos\mu - 1) =$$

$$= e^t(1 - \cos\mu) + \cos\mu\,.$$

Dieses Z genügt für $\mu = 0$ der Gleichung (12) mit der Anfangsbedingung (12').

Literaturverzeichnis

[1] *W. Gröbner:* Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

Souhrn

POZNÁMKA K ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC S PARAMETRY UŽITÍM LIEOVÝCH ŘAD

JOSEF MATUŠŮ

V práci se uvažuje systém diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\frac{\mathrm{d}Z_i}{\mathrm{d}t} = \vartheta_i(\mathbf{Z}; t; \boldsymbol{\mu}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

kde znakem $\boldsymbol{\mu}$ je označeno $s - 1$ ($s \geqq 2$ celé) komplexních parametrů $\mu_1, \ldots, \mu_{s-1}$. Hledá se řešení tohoto systému, které pro $\boldsymbol{\mu} = 0$ splňuje počáteční podmínky

$$(Z_i)_{t=0} = z_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Je ukázáno, že za předpokladu holomorfnosti funkcí $\vartheta_i(\mathbf{Z}; t; \boldsymbol{\mu})$ $(i = 1, \ldots, n)$ v okolí bodu $\{z_1, \ldots, z_n; 0; 0, \ldots, 0\}$ lze toto řešení vyjádřit ve tvaru s-rozměrné Lieovy řady.

Adresse des Autors: Doc. RNDr. *Josef Matušů*, CSc., ČVUT, Karlovo nám. 13, 120 00 Praha 2.