Václav Medek

Über den Umriss der konvexen Flächen

Aplikace matematiky, Vol. 23 (1978), No. 5, 378--380

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103762`

ÜBER DEN UMRISS DER KONVEXEN FLÄCHEN

Václav Medek

(Eingegangen 13. April 1976)

Das Ziel dieses Artikels ist den Hauptgedanken eines Algorithmus zu beschreiben, der zur Konstruktion des scheinbaren Umrisses eines konvexen Polyeders oder einer konvexen Fläche mittels eines Digitalrechners geeignet ist.

Unter einem konvexen Polyeder im reellen Euklidischen (bzw. erweiterten Euklidischen) dreidimensionalen Raum E_3 werden wir einen beschränkten konvexen Körper verstehen, dessen Grenze aus konvexen Vielecken gebildet ist.

Es ist bekannt, dass die parallele Projektion eines konvexen Gebildes immer ein konvexes Gebilde ist. Bei einer Zentralprojektion gilt diese Aussage nicht. Im weiteren, wenn es sich um eine Zentralprojektion aus dem Punkte S auf die Ebene π im erweiterten Raum E_3 handeln werde, werden wir immer voraussetzen, dass das projizierte konvexe Gebilde T mit der Ebene $\pi^S(\pi^S \parallel \pi,\ S \in \pi^S)$ keine gemeinsame Punkte hat. In diesem Falle ist die Zentralprojektion des Gebildes T wieder ein konvexes Gebilde.

Unter dem projizierenden Gebilde des Gebildes T verstehen wir die Menge der projizierenden Geraden (bei einer Zentralprojektion der Halbgeraden) aller Punkten des Gebildes T.

Es ist gut bekannt

Satz 1. *Die Projektion eines konvexen Polyeders T (unter obenerwähnter Bedingung bei Zentralprojektion) ist ein konvexes Vieleck.*

Satz 2. *Sei M ein konvexes Vieleck und seien M_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ solche konvexe Vielecke, deren Vereinigung das Vieleck M ist; sei A ein beliebiger Punkt der Ebene des Vielecks M; seien a_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ Abstände des Punktes A von allen Scheiteln aller Vielecken M_k und sei $a = \max\{a_j\}$; dann ist der Scheitel, der der Zahl a zugeordnet ist, ein Scheitel des Vielecks M.*

Beweis. Sei ${}^aV$ der Scheitel, der der Zahl a zugeordnet ist. Der Scheitel ${}^aV$ kann nicht ein innerer Punkt des Vielecks M sein, da in diesem Falle die Gerade A^aV die

Grenze des Vielecks M in zwei verschiedenen Punkten X, Y schneiden müsste. Sei $|AX| > |AY|$ und der Punkt X liege auf der Seite KL des Vielecks M. Dann hat mindestens einer der Scheitel K, L von dem Punkte A einen grösseren Abstand als der Punkt ${}^aV$. Der Punkt ${}^aV$ kann auch kein innerer Punkt irgendwelcher Seite des Vielecks M sein. Sei z. B. der Punkt ${}^aV$ ein innerer Punkt der Seite $UV \subset M$; dann hat wieder mindestens einer der Scheitel U, V von dem Punkte A einen grösseren Abstand als der Punkt ${}^aV$.

Satz 3. *Seien M und M_k die Vielecke, die in dem Satz 2 beschrieben sind; sei in die Ebene des Vielecks M ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt und sei V_t ($V_t = [x_t, y_t]$, $t = 1, 2, \ldots$) die Menge aller Ecken aller Vielecken M_k; sei $x_{t_1} = \max\{x_t\}$, $x_{t_2} = \min\{x_t\}$, $y_{t_3} = \max\{y_t\}$, $y_{t_4} = \min\{y_t\}$; dann sind die Punkte $V_{t_1}, V_{t_2}, V_{t_3}, V_{t_4}$ die Scheitel des Vielecks M unter der Voraussetzung, dass mittels der Koordinaten $x_{t_1}, x_{t_2}, y_{t_3}, y_{t_4}$ diese Scheitel schon eindeutig bestimmt sind.*

Beweis. Jeder Scheitel des Vielecks M ist einer der Scheitel V_t. Der Scheitel V_{t_1} kann nicht ein innerer Punkt des Vielecks M sein, da dann ein solcher Scheitel V'_{t_1} des Vielecks M existieren müsste, für welchen $x'_{t_1} > x_{t_2}$ gilt. Wenn der Punkt V_{t_1} ein innerer Punkt z. B. der Seite $KL \subset M$ wäre, dann müsste diese Seite mit der Achse y des Koordinatensystems parallel sein; in diesem Falle müssten dann aber mittels der Zahl x_{t_1} auch die Scheitel K, L bestimmt werden, was ein Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes wäre. Der Beweis für die übrigen drei Fälle ist dem angegebenen ähnlich.

Die Sätze 2 und 3 kann man zum Auffinden des scheinbaren Umrisses eines konvexen Polyeders mittels eines Digitalrechners benützen.

Den Satz 2 kann man so benützen, dass in die Ebene des Vielecks M das rechtwinklige Koordinatensystem eingeführt wird und wir werden den Scheitel ${}^aV$ auffinden. Durch den Scheitel ${}^aV$ geht eine endliche Menge der Seiten der Vielecke M_k und zwei von ihnen sind gleichzeitig die Seiten des Vielecks M. Es sind die zwei Seiten, deren Winkel der grösste von allen Winkeln aller Paare von diesen Seiten ist. Diese zwei Seiten kann man z. B. in dieser Weise auffinden: Die genannte Seiten werden wir als orientierte Strecken mit dem Anfangspunkt ${}^aV$ interpretieren und wir werden sie durch Vektoren ersetzen. Dann genügt es das $\min\{v_i v_j / (|v_i|\,|v_j|)\}$ zu finden und die zugehörige Vektoren bestimmen die gesuchte zwei Seiten des Vielecks M. Wenn ein solcher Fall entsteht, dass dieses Minimum für mehrere Vektoren vorkommt, dann bestimmt die zugehörige Seite der Vektor, der den grössten Betrag hat.

Den Satz 3 kann man in ähnlicher Weise benützen. Wir bestimmen die 4 Scheitel $V_{t_2}, V_{t_1}, V_{t_3}, V_{t_4}$ (bzw. wenn die Methode des Satzes 3 zu mehreren Scheiteln führt, wählen wir 4 von ihnen ganz willkürlich) und lassen aus unseren weiteren Betrachtungen alle solche Punkte V_t weg, die dem Viereck $V_{t_1}V_{t_2}V_{t_3}V_{t_4}$ gehören. Dann bleiben aus der ursprünglichen Menge aller Punkte V_t nur ihre 4 Untermengen und zwei „benachbarte“ von ihnen haben einen der Scheitel V_{t_1}, V_{t_2}, V_{t_3}, V_{t_4} gemeinsam. Die Scheitel des Vielecks M in jeder von diesen Untermengen bestimmen wir mittels einer ähnlichen Methode wie in dem vorangehenden Fall.

Die beschriebene Methode zur Konstruktion der Kurve des scheinbaren (und damit auch des wirklichen) Umrisses eines konvexen Polyeders kann man auch zur Konstruktion des scheinbaren Umrisses einer konvexen Fläche benützen.

Unter einer konvexen Fläche verstehen wir die Grenze eines konvexen Gebildes. Im weiteren werden wir uns nur mit beschränkten konvexen Flächen beschäftigen.

Sei Φ eine konvexe Fläche. Wählen wir auf der Fläche Φ eine genügende Menge gleichmässig und dicht verteilter Punkte V_t. Dann existiert ein solches in die Fläche Φ eingeschriebenes konvexes Polyeder, dessen Scheitel die Punkte V_t sind. Dieses Polyeder ist der Durchschnitt aller konvexen Gebilde, die alle Punkte V_t enthalten.

Auch wenn die Definition dieses in die Fläche Φ eingeschriebenen konvexen Polyeders T keinen konstruktiven Charakter hat, ist es möglich das Vieleck T' seiner Projektion zu konstruieren. Wir konstruieren die Projektionen V_t' aller Punkte V_t und finden das Vieleck T' als die konvexe Hülle der Menge aller Punkte V_t'.

Beschäftigen wir uns z. B. mit der rechtwinkligen Projektion auf die Ebene π. Dann schneidet der projizierende Zylinderraum des Polyeders T die Ebene π in einem Vieleck $\overline{T}$, das gleichzeitig das Vieleck T' ist. Jeder Punkt aus T' gehört wirklich zu $\overline{T}$, da zu T' gerade alle Punkte V_t' und alle Punkte der Strecken des Typs $V_t' V_{t'}'$ gehören. Da das Vieleck $\overline{T}$ in derselben Weise gebildet ist, ist $T' = \overline{T}$.

Die Grenze des Vielecks T' ist der scheinbare Umriss des Polyeders T und approximiert darum den scheinbaren Umriss der Fläche Φ.

Die geeignete Wahl der Punkte V_t auf der Fläche Φ kann man verwirklichen z. B. mittels von zwei Systemen von Parameterkurven auf der Fläche Φ als Durchschnittspunkte von je zwei Kurven verschiedener Systemen.

Súhrn

O OBRYSE VYPUKLÝCH PLOCH

VÁCLAV MEDEK

V článku sa popisuje jedna metóda konštrukcie obrysu vypuklého útvaru vhodná pre automatické spracovanie.

Adresse des Autors: Prof. RNDr. *Václav Medek,* Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty SVŠT, Radlinského 11, 884 20 Bratislava.