Aplikace matematiky

Zdeněk Jankovský

Zur Approximation der Bahnkurven der $\mathcal{M}$-Bewegung

Aplikace matematiky, Vol. 24 (1979), No. 5, 389–395

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103819

ZUR APPROXIMATION DER BAHNKURVEN DER $\mathscr{M}$-BEWEGUNG

ZDENĚK JANKOVSKÝ

(Eingegangen 17. Januar 1978)

EINLEITUNG

Im ersten Absatz des vorliegenden Artikels werden die Integral- und Differentialinvarianten der Möbiusschen Gruppe ($\mathscr{M}$-Gruppe) G im Zusammenhang mit der Schwarzschen Ableitung hergeleitet. Im zweiten Absatz wird der Berührungsbegriff zweier Kurven in der Geometrie der Möbiusschen Ebene ($\mathscr{M}$-Ebene) bei der Ausnutzung der Komplexbeschreibung eingeführt. Diesen Teil kann man bei einer entsprechenden Beschreibung auf einen beliebigen Raum im Kleinschen Sinne und auf eine beliebige auf ihm operierende Liesche Gruppe verallgemeinern.

Im dritten Absatz des Artikels wird die Berührung einer gegebenen Kurve in der $\mathscr{M}$-Ebene mit den Kurven mit konstanter $\mathscr{M}$-Krümmung (s. [1], bzw. [4], bzw. [3]) untersucht und es werden die Analoge der Mittelpunkte der Krümmung und der Evolute der gegebenen Kurve gefunden. Im letzten Absatz wird diese Problematik vom kinematischen Standpunkt interpretiert und es wird der Zusammenhang mit der $\mathscr{M}$-Bewegung (s. [2], bzw. [4]) und ihrer Bahnkurven erklärt.

§ 1. INTEGRAL- UND DIFFERENTIALINVARIANTEN DER $\mathscr{M}$-GRUPPE

Es seien R, bzw. K der Körper der reellen, bzw. komplexen Zahlen, $\mathscr{I} \subset R$ ein offenes Intervall, $C^n(\mathscr{I})$ der lineare Raum aller n-mal stetig differenzierbaren komplexen Funktionen $\varphi : \mathscr{I} \to K$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Es seien $\mathfrak{M}$ die Möbiussche Ebene, die bei der Komplexbeschreibung als die erweiterte Gaußsche Ebene $\{K \cup (\infty)\}$ aufgefaßt wird, G die auf $\mathfrak{M}$ operierende Möbiussche Gruppe mit der analytischen Darstellung

$$z = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}\,; \quad \alpha\delta \neq \beta\gamma\,; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K\,, \quad (z), (\zeta) \in \mathfrak{M}\,,$$

s die Integralinvariante (Bogen) der Gruppe G.

Erinnern wir daran, daß für

$$(1) \qquad z(t) \in C^3(\mathscr{I}), \quad \dot{z} \neq 0 \quad \text{auf} \quad \mathscr{I}$$

die Schwarzsche Ableitung

$$(2) \qquad \{z, t\} = I(t) = I_1(t) + \mathrm{j}I_2(t) = \frac{\dddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)^2; \quad \mathrm{j}^2 = -1,$$

eine G-Invariante ist (dann sind auch $I_1 = \operatorname{Re} I$ und $I_2 = \operatorname{Im} I$ G-Invarianten).

(2) ist nicht die Zeitinvariante, d. h. die Invariante angesichts der zulässigen Transformationen des Parameters t:

$$\Theta : {}'\mathscr{I} \to \mathscr{I}, \quad t = \Theta('t), \quad \text{wo} \quad \Theta = \bar{\Theta} \in C^1('\mathscr{I}) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}'t} \neq 0 \quad \text{auf} \quad '\mathscr{I},$$

denn es gilt:

$$(3) \qquad \{z, t\} = \{z, \Theta\}\,\dot{\Theta}^2 + \{\Theta, t\}$$

(die Cayleysche Beziehung).

Aus (3) folgt:

$$(4) \qquad \begin{aligned} I_1(t) &= I_1(\Theta)\,\dot{\Theta}^2 + \{\Theta, t\} \\ I_2(t) &= I_2(\Theta)\,\dot{\Theta}^2 \end{aligned}$$

Von der G-Invarianz der Schwarzschen Ableitung und aus (4) folgt:

Satz 1. Sgn $I_2(t)$ *ist eine G-Invariante und eine Zeitinvariante.*

Definition 1. *Die Invariante* sgn $I_2(t)$ *wird die* $\mathscr{M}$*-Signatur genannt.*

Bei der Voraussetzung

$$\operatorname{sgn} I_2(t) \neq 0 \quad \text{auf} \quad \mathscr{I}$$

legen wir

$$(5) \qquad I_2(\Theta) = \varepsilon = \operatorname{sgn} I_2(t).$$

Gemäß (4) bekommt man

$$(6) \qquad \Theta(t) = \int [\varepsilon\, I_2(t)]^{1/2}\,\mathrm{d}t, \quad t \in \mathscr{I}$$

und es gilt:

Satz 2. (6) *ist eine Integralinvariante einer Kurve in* $\mathfrak{M}$ *von der analytischen Darstellung* (1).

Definition 2. *Die Integralinvariante* (6) *wird der* $\mathscr{M}$*-Bogen genannt.*

Wir führen durch diese Invariante den natürlichen Parameter $s(=\Theta)$ der Kurve (1) ein. Aus (3) bei der Auswahl (5) und aus (6) kann man $I_1(s)$ in der Form

$$I_1(s) = \frac{8\, I_1(t)\,(I_2(t))^2 - 4\, I_2(t)\, \ddot{I}_2(t) + 5(\dot{I}_2(t))^2}{8\, \varepsilon (I_2(t))^3} \tag{7}$$

darstellen.

Satz 3. (7) *ist die fundamentale Differentialinvariante* (*G-Invariante und Zeitinvariante*) *der Kurve in* $\mathfrak{M}$ *von der analytischen Darstellung* (1).

Beweis. Die G-Invarianz von (7) folgt aus der G-Invarianz von $I_1(t)$ und $I_2(t)$; die Zeitinvarianz von (7) kann man leicht durch die unmittelbare Berechnung feststellen. Die Ordnung dieser Differentialinvarianten ist 5; gemäß der Lieschen Theorie hat die fundamentale Differentialinvariante der Gruppe G die Ordnung auch 5 und der Satz ist bewiesen.

Definition 3. *Die Differentialinvariante* (7) *wird* $\mathscr{M}$*-Krümmung genannt* (vgl. [5]).

§ 2. DIE BERÜHRUNG VON ZWEI KURVEN IN DER $\mathscr{M}$-EBENE

Die Berührung von zwei Kurven in der $\mathscr{M}$-Ebene $\mathfrak{M}$ mit der $\mathscr{M}$-Gruppe G als der bewegten Gruppe führt man als einen geometrischen Begriff ein, d. h. als den Gruppeninvariantenbegriff der Gruppe G und den Invariantenbegriff angesichts der Parametrisierungen beider Kurven.

Ist $\mathscr{T} \in G$ die Transformation der Gruppe G und sind k_1, k_2 zwei durch den natürlichen Parameter s parametrisierte Kurven in $\mathfrak{M}$

$$k_i \equiv f_i = f_i(s)\,, \quad i = 1, 2 \tag{8}$$

wo $f_i \in C^0(\mathscr{I})$ ist, dann ist

$$l_i \equiv h_i = h_i(s) = \mathscr{T} \circ f_i(s)\,,$$

wo $h_i \in C^0(\mathscr{I})$, G-äquivalente Kurven mit den Kurven k_i (übertragen durch die Transformation $\mathscr{T}$) sind. Sind in (8) $f_i \in C^{n+1}(\mathscr{I})$ und gelten die Beziehungen

$$f_1^{(k)}(s_0) = f_2^{(k)}(s_0)\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n\,; \quad s_0 \in \mathscr{I}\,, \tag{9}$$

bzw. noch

$$f_1^{(n+1)}(s_0) \neq f_2^{(n+1)}(s_0)\,, \tag{10}$$

dann gelten die Beziehungen (9), bzw. (9) und (10) in diesem Punkte s_0 auch nach einer Übertragung durch die Transformation $\mathscr{T} \in G$ und wir können definieren:

Definition 4. *Wir sagen, daß zwei Kurven $k_1, k_2 \subset \mathfrak{M}$ im Punkte $P \in k_1, k_2$ die Berührung der Ordnung wenigstens n, bzw. genau n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ haben, wenn für ihre natürlichen Parametrisierungen* (8) *mit dem Parameter s_0 auf k_1 und k_2 im Punkte P die Beziehungen* (9), *bzw.* (9) *und* (10) *gelten.*

§ 3. DIE MITTELPUNKTE DER $\mathscr{M}$-KRÜMMUNG, DIE $\mathscr{M}$-EVOLUTE

Untersuchen wir die Berührung im Sinne der Definition 4 einer mit genügender Regularität im beliebigen Punkte vom Parameter s_0 gegebenen Kurve $k_1 \subset \mathfrak{M}$ von der natürlichen Parametrisierung (8) mit den Kurven k_2 aus dem Kurvensystem:

$$(11) \qquad k_2 \equiv f_2(t) = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t}\,; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K\,, \quad \alpha\delta \neq \beta\gamma\,.$$

(11) stellt das 6-parametrige (die Parameter: $\operatorname{Re} \alpha/\gamma$, $\operatorname{Im} \alpha/\gamma, \ldots, \operatorname{Im} \delta/\gamma$) System der Kreiskurven in $\mathfrak{M}$ dar, d. h. das System der geometrischen Grundobjekte zweiten Art der $\mathscr{M}$-Geometrie. (11) sind die Minimalkurven der $\mathscr{M}$-Geometrie (s. [3]), darum kann man nicht (11) durch $\mathscr{M}$-Bogen parametrisieren und die Berührung von k_1 mit k_2 wird im Sinne der Definition 4 nicht definiert.

Untersuchen wir die Berührung einer mit genügender Regularität im beliebigen Punkte vom Parameter s_0 gegebenen Kurve $k_1 \subset \mathfrak{M}$ von der analytischen Darstellung (8) mit den Kurven k_2 aus dem Kurvensystem:

$$(12) \qquad k_2 \equiv f_2(s) = \frac{\alpha + \beta \exp(\chi s)}{\gamma + \delta \exp(\chi s)}\,,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \chi \in K$, $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, $|\chi| = 1$, $\chi \neq \pm\bar{\chi}$. (12) sind die Kurven mit konstanter $\mathscr{M}$-Krümmung $({}^0I_1)_2 \in R$, die wir als Lösungen der Schwarzschen Differentialgleichung

$$\{z, t\} = ({}^0I_1)_2 + \mathrm{j}\varepsilon\,, \quad \mathrm{j}^2 = -1\,,$$

bekommen. (12) stellt das 7-parametrige (die Parameter: $\operatorname{Re} \alpha/\gamma$, $\operatorname{Im} \alpha/\gamma, \ldots, \operatorname{Im} \delta/\gamma, \chi$) System der ω-Loxodromen des hyperbolischen Büschels der Kreise mit den Grundpunkten (α/γ), (β/δ) dar; $\omega = \operatorname{Arg} \chi$ (s. [2], bzw. [3]).

Nachdem jede der Bedingungen (9) komplex ist, können wir 6 Parameter aus den ersten drei Bedingungen (9) bestimmen. Wir bekommen das 1-parametrige (Parameter χ) ω-Loxodromensystem von der analytischen Darstellung

$$(13) \quad k_2 \equiv f_2(s) = \frac{\chi f_1(s_0) f_1'(s_0)\, E_1(s) + \left(f_1(s_0) f_1''(s_0) - 2(f_1'(s_0))^2\right) E_2(s)}{\chi f_1'(s_0)\, E_1(s) + f_1''(s_0)\, E_2(s)}\,,$$

wo $E_1(s) = 1 + \exp(\chi s)$, $E_2(s) = 1 - \exp(\chi s)$ ist.

Die ω-Loxodromen (13) haben mit der gegebenen Kurve k_1 in ihrem Punkte vom Parameter s_0 eine Berührung wenigstens zweiter Ordnung. Die asymptotischen Punkte der ω-Loxodromen (13) sind:

$$A_1(\chi) = f_1(s_0) - 2\frac{(f_1'(s_0))^2}{f_1''(s_0) + \chi f_1'(s_0)} \tag{14}$$

$$A_2(\chi) = f_1(s_0) - 2\frac{(f_1'(s_0))^2}{f_1''(s_0) - \chi f_1'(s_0)}.$$

Jede ω-Loxodrome (13) hat eine konstante $\mathscr{M}$-Krümmung $({}^0I_1)_2$, die von der Wahl von χ abhängt. Wir können sie in der Form

$$({}^0I_1)_2 = \varepsilon_2 \operatorname{cotg} 2\omega\,; \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}, \tag{15}$$

wo ε_2 die $\mathscr{M}$-Signatur der ω-Loxodrome (13) ist, darstellen.

Angesichts (15) können wir χ so wählen, daß die $\mathscr{M}$-Krümmungen $({}^0I_1)_1$, $({}^0I_1)_2$ beider Kurven k_1, k_2 im Punkte s_0 einander gleich sind:

$$({}^0I_1)_1 = \varepsilon_2 \operatorname{cotg} 2(\operatorname{Arg} \chi_0) = ({}^0I_1)_2\,,$$

dieses bekommen wir bei der Wahl

$$0 < \omega_0 = \operatorname{Arg} \chi_0 = \tfrac{1}{2} \operatorname{arccotg} (\varepsilon_2({}^0I_1)_1) < \frac{\pi}{2} \tag{16}$$

und es gilt:

Satz 4. *Die asymptotischen Punkte* (14) *werden bei der Wahl* $\chi = \chi_0$ *von* (16) *zu der gegebenen Kurve* $k_1 \subset \mathfrak{M}$ *von der analytischen Darstellung* (8) *und zu ihrem Punkte* s_0 *eindeutig zugeordnet.*

Angesichts der Analogie mit der euklidischen Geometrie definieren wir:

Definition 5. *Die eindeutig zugeordneten Punkte* $A_i(\chi_0)$, $i = 1, 2$, *zur gegebenen Kurve* $k_1 \subset \mathfrak{M}$ *in ihrem Punkte* s_0 *nennen wir die Mittelpunkte der* $\mathscr{M}$*-Krümmung. Die Menge der Mittelpunkte der* $\mathscr{M}$*-Krümmung der Kurve* k_1 *nennen wir ihre* $\mathscr{M}$*-Evolute.*

§ 4. DIE APPROXIMATION DER BAHNKURVE DER $\mathscr{M}$-BEWEGUNG DURCH IHRE SCHMIEGOBJEKTE

In der Möbiusschen Differentialgeometrie spielt die ω_0-Loxodrome (Doppelspirale) (13) mit

$$\chi = \exp\left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{j} \operatorname{arccotg} \varepsilon_2({}^0I_1)_1\right)$$

die Rolle des Schmiegobjektes der Kurve k_1 in ihrem Punkte s_0.

Die Differentialinvariante $({}^0I_1)_1$ der Kurve k_1 ist eine Differentialinvariante dritten Ordnung (nach s). Wählen wir die $\mathcal{M}$-Signaturen der gegebenen Kurve und ihres Schmiegobjektes (ω_0-Loxodrome) einander gleich

$$({}^0I_2)_1 = ({}^0I_2)_2$$

folgt aus dieser Beziehung und aus der Forderung der Gleichheit der $\mathcal{M}$-Krümmung die Beziehung:

$$({}^0I)_1 = ({}^0I)_2 \tag{17}$$

(die Gleichheit der Schwarzschen Ableitungen).

Aus der geforderten Gleichheit der Ableitungen der Ordnung 0, 1, 2 der analytischen Darstellung der Kurve $k_1 \subset \mathfrak{M}$ und ihres Schmiegobjektes im Punkte s_0 und aus (17) folgt die Gleichheit der dritten Ableitungen im Punkte s_0. Weil die vierte Ableitungen allgemein nicht einander gleich sind, bekommen wir:

Satz 5. *Die gegebene Kurve $k_1 \subset \mathfrak{M}$ mit genügender Regularität hat mit ihrem Schmiegobjekt im Punkte s_0 eine Berührung wenigstens dritter Ordnung.*

Weiter (s. [3]).

Satz 6. *Die Bahnkurve der $\mathcal{M}$-Bewegung mit genügender Regularität wird in ihrem Punkte s_0 durch die ω_0-Loxodrome (13) (mit $\chi = \chi_0$) wenigstens in dritter Ordnung approximiert (im Sinne der Berührung).*

Sei $k_1 \subset \mathfrak{M}$ eine gegebene Kurve von der analytischen Darstellung (8) mit genügender Regularität. Ihr Schmiegobjekt im Punkte s_0 (ω_0-Loxodrome) ist die Integralkurve des stationaren Riccatischen Feldes mit Singularpunkten in den asymptotischen Punkten der ω_0-Loxodrome. Dieses stationare Riccatische Feld generiert die $\mathcal{M}$-Bewegung, die durch zwei feste Punkte (asymptotische Punkte der ω_0-Loxodrome) und eine Bahnkurve (ω_0-Loxodrome) bestimmt wird. So können wir das 1-parametrige (Parameter s) System der stationaren Riccatischen Felder bestimmen, das die $\mathcal{M}$-Bewegung mit der Bahnkurve $k_1(s)$ generiert.

Literatur

[1] *G. V. Buschmanova, A. P. Norden:* Elementy konformnoj geometrii. Iz. Kazaňskogo univ., Kazaň, 1972 (russisch).

[2] *Z. Jankovský:* $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den (U)-Automorphismen. Čas. pro pěst. mat., 101 (1976), 2, 140—152.

[3] *Z. Jankovský:* Die Grundlage der $\mathcal{M}$-Kinematik und der $\mathcal{M}$-kinematischen Geometrie in der Ebene. Praha, 1974, kandidátská disertace (tschechisch).

[4] *Z. Jankovský:* Zu den einigen Fragen der Ebene kinematische Geometrie auf der $\mathcal{M}$-Gruppe. Acta polytechnica-Práce ČVUT v Praze, (1978), 7 (IV., 3), 43—51 (tschechisch).

[5] *J. Maeda:* Diferential Möbius geometry of plane curves. Japan. J. Math., 18 (1941/43), 67—260 (englisch).

Souhrn

K APROXIMACI TRAJEKTORIÍ $\mathscr{M}$-POHYBU

Zdeněk Jankovský

V článku je odvozen na podkladě Schwarzovy derivace integrální a diferenciální invariant Möbiovy grupy ($\mathscr{M}$-grupy). Na základě těchto invariantů je zkoumán dotyk dané křivky v Möbiově rovině ($\mathscr{M}$-rovině) s křivkami o konstantní $\mathscr{M}$-křivosti. Jsou nalezeny $\mathscr{M}$-analogy středů křivosti, evoluty a oskulačního objektu dané křivky. Tato problematika je v závěru článku interpretována z kinematického hlediska.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Zdeněk Jankovský,* CSc., katedra matematiky, fakulta elektrotechnická ČVUT, Suchbátarova 2, 166 27 Praha 6, Dejvice.