Libuše Grygarová

Zur asymptotischen Berührung von konvexen Mengen

Aplikace matematiky, Vol. 25 (1980), No. 3, 221--228

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103853

SVAZEK 25 (1980) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 3

ZUR ASYMPTOTISCHEN BERÜHRUNG VON KONVEXEN MENGEN

LIBUŠE GRYGAROVÁ

(Eingegangen 20. Januar 1978)

Es ist bekannt, dass ein konvexes Optimierungsproblem auf ein Problem der Berührung von zwei konvexen Mengen (des Epigraphen der vorgegebenen Zielfunktion und der gegebenen Restriktionsmenge) zurückgeführt werden kann. Die für die praktische Anwendungen nützliche Theorie der nichtlinearen (insbesondere der konvexen) Optimierung kann daher auch von diesem Gesichtspunkt behandelt werden, wobei die betreffenden geometrischen Zugänge auch neue Ideen im Ausbau neuer numerischen Methoden beitragen könnten.

Dieser Artikel stellt eine Ergänzung zu den Arbeiten [1], [2], [3], [4] dar, so dass durch diese Gesammtheit eine einheitliche und ausreichende (geometrische sowie analytische) Charakteristik einer Punktberührung sowie einer asymptotischen Berührung von zwei abgeschlossenen, konvexen Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ vorgelegt wird. Die Bedeutung dieser einheitlichen Berührungstheorie für die eigene nichtlineare (konvexe) Optimierung und für die Vielfälltigkeit ihrer praktischen Anwendungen besteht darin, dass das anschauliche, geometrische Konzept eine tiefe und ausreichende theoretische Basis für die Behandlung solcher wichtigen Optimierungsprobleme der konvexen Optimierung, wie die Existenz der Lösung, die Qualität der Lösbarkeitsmenge, spezielle Probleme der Dualitätstheorie u. s. w., darbietet.

Der Begriff der asymptotischen Berührung von zwei abgeschlossenen, konvexen Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ ist – vom geometrischen Standpunkt aus – nicht so einfach, wie der der Punktberührung solcher Mengen, und es gibt auch kaum eine Möglichkeit auf elementare Weise auf ihren Zusammenhang hinzuweisen. In der Arbeiten [3], [4] war der Begriff der asymptotischen Berührung in bestimmter Richtung sowie der Begriff der asymptotischen Berührung k-ter Ordnung näher analysiert. Zugleich wurden in diesen Arbeiten hinreichende und notwendige Bedingungen für eine solche Berührung abgeleitet. In der Arbeit [2] wurdenSätze, die die Berührung von zwei abgeschlossenen, konvexen Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ charakterisieren, aufgestellt. Dabei wurde mit Vorteil auch der Begriff der sphärischen Abbildung der fraglichen Mengen ausgenützt.

Das Ziel der vorgelegten Arbeit ist die Herleitung solcher Sätze, die die asymptotische Berührung von zwei konvexen, abgeschlossenen Mengen in $\mathbf{E}_n$ angehen, und die den Sätzen aus der Arbeit [2] ähnlich sind. Es zeigt sich, dass der Begriff der asymptotischen Berührung k-ter Ordnung durch einen geeigneten Prozess auf den Begriff der Punktberührung eines anderen Mengenpaares von abgeschlossenen, konvexen Mengen sich überführen lässt und somit (aufgrund der Ergebnisse der Arbeit [2]) können die entsprechenden Sätze abgeleitet werden.

Da die vorgelegte Arbeit unmittelbar auf die Ergebnisse der Arbeiten [1], [2], [3], [4] anschliesst, wird – der Einheitlichkeit wegen – die Symbolik, die allen diesen Arbeiten gemeinsam ist, behalten. Bei den Untersuchungen und der Herleitung der Hauptergebnisse dieses Artikels geht man in erster Reihe von dem Begriff des Recessionskegels, des sphärisches Bildes einer konvexen, abgeschlossenen Menge, von ihren Eigenschaften, die in der Arbeit [1] abgeleitet, b.z.w. angeführt wurden, aus.

Was das Verzeichnis der benutzten Literatur angeht, so werden hier nur die Arbeiten [1], [2], [3], [4] des Verfassers angegeben, in den die Arbeiten anderer Autoren, die mit diesem Problemkreis zusammenhängen, zitiert werden.

Satz 1. *Zwei nichtleere, konvexe, abgeschlossene Mengen* ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ *in* $\mathbf{E}_n$ *besitzen eine asymptotische Berührung der Ordnung* 1 *genau dann, wenn*

$$(3.1) \qquad {}^1_1\mathfrak{M} \cap {}^1_2\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \mathrm{cl}\,{}^1_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}^1_2\mathfrak{M} \neq \emptyset$$ [1])

ist, und eine asymptotische Berührung der Ordnung $k > 1$ $(k \leqq n - 1)$ *genau dann, wenn*

$$(3.2) \qquad \mathrm{cl}\,{}^r_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}^r_2\mathfrak{M} = \emptyset \quad (r = 1, \ldots, k-1)\,, \quad {}^k_1\mathfrak{M} \cap {}^k_2\mathfrak{M} = \emptyset\,,$$
$$\mathrm{cl}\,{}^k_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}^k_2\mathfrak{M} \neq \emptyset\,,$$

gilt (dabei haben ${}^r_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2;\ r = 1, \ldots, k)$ *die Bedeutung aus* (2.15), [4]).

Beweis. Falls die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ eine asymptotische Berührung der Ordnung 1 besitzen, so gilt nach Definition 1, [4], ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$, ${}^1d' \geqq 0$ und nach (2.16), (2.15), [4], $\dim(\mathrm{cl}\,{}^1_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}^1_2\mathfrak{M}) \geqq 0$, d. h. $\mathrm{cl}\,{}^1_1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}^1_2\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Da nach (2.3), (2.15), [4], ${}_i\mathfrak{M} \equiv {}^1_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ ist, so folgt nach Lemma 2, Lemma 4, [4], weiter ${}^1_1\mathfrak{M} \cap {}^1_2\mathfrak{M} = \emptyset$, d. h. die Bedingungen (3.1) sind erfüllt.

Falls die Bedingungen (3.1) erfüllt sind, so ist nach (2.15), [4], ${}_i\mathbf{M} \subset {}^1_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ und somit ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$. Aus (3.1) ergibt sich dann $\varrho({}^1_1\mathfrak{M}; {}^1_2\mathfrak{M}) = 0$. Wählt man nun $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existieren Punkte ${}_i\mathbf{x} \in {}^1_i\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ mit $\varrho({}_1\mathbf{x}; {}_2\mathbf{x}) < \varepsilon$. Es sei $\mathbf{v} \in \mathrm{rel.\,int}\,({}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R)$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, beliebig (nach (2.3), [4], ist die Existenz eines solchen $\mathbf{v}$ gesichert, denn $\mathbf{L}_d(\mathbf{o})$ stellt die lineare Hülle von ${}_1\mathbf{M}_R \cap {}_2\mathbf{M}_R$ dar). Die Halbgeraden

[1]) Wir bezeichnen mit dem Symbol $\mathrm{cl}\,\mathfrak{M}$ die Abschliessung der Menge $\mathfrak{M}$.

$$_ip' = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n \mid \mathbf{x} = {}_i\mathbf{x} + \mathbf{v}t,\ t \geqq 0\} \quad (i = 1, 2)$$

haben dann die Eigenschaft $\varrho({}_1p'; {}_2p') < \varepsilon$. Nach Beweis des Satzes 6, [3], gibt es dann Halbgeraden $_ip''$ mit $_ip'' \subset {}_ip'$, $_ip'' \subset {}_i\mathbf{M}$ $(i = 1, 2)$. Da auch für sie $\varrho({}_1p''; {}_2p'') < \varepsilon$ gilt und $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$. Wegen $\mathrm{cl}\,{}_1^1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2^1\mathfrak{M} \neq \emptyset$, ist $^1d' = \dim(\mathrm{cl}\,{}_1^1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2^1\mathfrak{M}) \geqq 0$ und nach Definition 1, [4], besitzen die Mengen $_1\mathbf{M}$, $_2\mathbf{M}$ eine asymptotische Berührung der Ordnung 1.

Wir setzen nun voraus, dass $_1\mathbf{M}$, $_2\mathbf{M}$ eine asymptotische Berührung der Ordnung $k > 1$ besitzen. Nach Definition 1, [4], gilt dann $_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$, $^rd' = -1$ $(1 \leqq r < k)$, $^kd' \geqq 0$. Daraus und aus (2.15), (2.16), [4], folgt $\mathrm{cl}\,{}_1^r\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2^r\mathfrak{M} = \emptyset$ $(1 \leqq r < k)$, $\mathrm{cl}\,{}_1^k\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2^k\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Aus (2.15), [4], ergibt sich

$$\emptyset \neq {}_i\mathbf{M} \subset {}_i^1\mathfrak{M} \subset \ldots \subset {}_i^{k-1}\mathfrak{M} \subset {}_i^k\mathfrak{M} \quad (i = 1, 2) \tag{3.3}$$

und weiter, dass $\mathrm{cl}\,{}_i^{k-1}\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ nichtleere, konvexe, abgeschlossene Mengen in $\mathbf{E}_n$ sind. Wegen $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$ und aus (3.3) folgt $\varrho(\mathrm{cl}\,{}_1^{k-1}\mathfrak{M}; \mathrm{cl}\,{}_2^{k-1}\mathfrak{M}) = 0$ und es gilt $\mathrm{cl}\,{}_1^{k-1}\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2^{k-1}\mathfrak{M} = \emptyset$, so folgt daraus durch Anwendung von Lemma 2, Lemma 4, [4], auf die Mengen $\mathrm{cl}\,{}_i^{k-1}\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ (nach (2.15), [4]) ${}_1^k\mathfrak{M} \cap {}_2^k\mathfrak{M} = \emptyset$. Die Bedingungen (3.2) sind daher erfüllt.

Falls andererseits die Bedingungen (3.2) erfüllt sind, so ist nach (2.15), (2.16), [4],

$$^rd' = -1 \quad (1 \leqq r < k)\,, \quad ^kd' \geqq 0\,. \tag{3.4}$$

Aus den Bedingungen (3.2) folgt weiter

$${}_1^k\mathfrak{M} \cap {}_2^k\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \varrho({}_1^k\mathfrak{M}; {}_2^k\mathfrak{M}) = 0\,.$$

Betrachtet man statt der Mengen $_i\mathbf{M}$ die Mengen $\mathrm{cl}\,{}_i^{k-1}\mathfrak{M}$, statt ${}_i^1\mathfrak{M}$ die Mengen ${}_i^k\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$, so folgt nach dem schon bewiesenen ersten Teil der Behauptung des Satzes die Implikation

$${}_1^k\mathfrak{M} \cap {}_2^k\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \varrho({}_1^k\mathfrak{M}; {}_2^k\mathfrak{M}) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{cl}\,{}_1^{k-1}\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2^{k-1}\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \varrho(\mathrm{cl}\,{}_1^{k-1}\mathfrak{M}; \mathrm{cl}\,{}_2^{k-1}\mathfrak{M}) = 0$$

und daher auch

$${}_1^k\mathfrak{M} \cap {}_2^k\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \varrho({}_1^k\mathfrak{M}; {}_2^k\mathfrak{M}) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow {}_1^{k-1}\mathfrak{M} \cap {}_2^{k-1}\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \varrho({}_1^{k-1}\mathfrak{M}; {}_2^{k-1}\mathfrak{M}) = 0\,.$$

Auf ähnliche Art erhält man für $r = 1, \ldots k$,

$${}_1^r\mathfrak{M} \cap {}_2^r\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \varrho({}_1^r\mathfrak{M}; {}_2^r\mathfrak{M}) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow {}_1^{r-1}\mathfrak{M} \cap {}_2^{r-1}\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \varrho({}_1^{r-1}\mathfrak{M}; {}_2^{r-1}\mathfrak{M}) = 0$$

und als Spezialfall (nach (2.15), [4])

$${}_1^k\mathfrak{M} \cap {}_2^k\mathfrak{M} = \emptyset\,, \quad \varrho({}_1^k\mathfrak{M}; {}_2^k\mathfrak{M}) = 0 \Rightarrow {}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset\,. \quad \varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0\,.$$

Nach (3.4) folgt daraus dann mit Hinsicht auf die Definition 1, [4], dass die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ eine asymptotische Berührung der Ordnung k besitzen.

Bemerkung 1. Durch den Satz 1 wurde praktisch das Problem einer asymptotischen Berührung der Ordnung k von zwei abgeschlossenen, konvexen Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ in $\boldsymbol{E}_n$ auf das Problem der Punktberührung von abgeschlossenen, konvexen Mengen $\mathrm{cl}\,{}_1^k\mathfrak{M}$, $\mathrm{cl}\,{}_2^k\mathfrak{M}$ überführt.

Bemerkung 2. Sind ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen in $\boldsymbol{E}_n$ mit ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset$, $\boldsymbol{L}$ die lineare Hülle von ${}_1\boldsymbol{M} \cup {}_2\boldsymbol{M}$, so kann man, o. B. d. A. voraussetzen, dass der Koordinatenursprung $\boldsymbol{o}$ in $\boldsymbol{E}_n$ die Eigenschaft $\boldsymbol{o} \in \boldsymbol{L}$ hat. Dann gilt ${}_i\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \subset \boldsymbol{L}$ $(i = 1, 2)$, $({}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}) \subset \boldsymbol{L}$. Für die lineare Hülle $\boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{o})$ des Kegels ${}_1\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}} \cap {}_2\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{R}}$ gilt daher $\boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{o}) \subset \boldsymbol{L}$ und wegen ${}_1\boldsymbol{M} \cup {}_2\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{L}$, ist auch $\boldsymbol{L}_d(\boldsymbol{x}) \subset \subset \boldsymbol{L}$ für alle $\boldsymbol{x} \in {}_1\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{x} \in {}_2\boldsymbol{M}$. Nach (2.15), [4], folgt daraus dann ${}_i^1\mathfrak{M} \equiv {}_i\mathfrak{M} \subset \boldsymbol{L}$ und daher auch $(\mathrm{cl}\,{}_1^1\mathfrak{M} \cup \mathrm{cl}\,{}_2^1\mathfrak{M}) \subset \boldsymbol{L}$ und auf ähnliche Weise weiter $(\mathrm{cl}\,{}_1^r\mathfrak{M} \cup \cup\, \mathrm{cl}\,{}_2^r\mathfrak{M}) \subset \boldsymbol{L}$ für $r = 1, 2, \ldots$.

Satz 2. *Falls* ${}_i\boldsymbol{M} \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$ *abgeschlossene, konvexe Mengen in* $\boldsymbol{E}_n$ *mit* ${}_1\boldsymbol{M} \cap {}_2\boldsymbol{M} = \emptyset$ *und* $\boldsymbol{L}$ *die lineare Hülle von* ${}_1\boldsymbol{M} \cup {}_2\boldsymbol{M}$ *sind, so besitzen die Mengen* ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ *eine asymptotische Berührung der Ordnung* k $(1 \leqq k \leqq n - 1)$ *genau dann, wenn*

a) $\mathrm{cl}\,{}_1^k\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2^k\mathfrak{M} \neq \emptyset$;

b) *es gibt einen solchen Vektor* $\boldsymbol{y}$ $(\|\boldsymbol{y}\| = 1)$, *dass für jeden Punkt* ${}_0\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\,{}_1^k\mathfrak{M} \cap \cap\, \mathrm{cl}\,{}_2^k\mathfrak{M}$

$$(3.5) \qquad {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}\,, \quad \inf_{\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\,{}_1{}^r\mathfrak{M}} \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} = ({}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\,{}_2{}^r\mathfrak{M}} \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} \quad (r = 0, \ldots, k - 1)$$

ist, wobei entweder

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > ({}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \textit{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\,{}_1^r\mathfrak{M} \quad (r = 0, \ldots, k - 1)$$

oder

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < ({}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \textit{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\,{}_2^r\mathfrak{M} \quad (r = 0, \ldots, k - 1)$$

gilt[2]).

Beweis. Falls die Mengen ${}_1\boldsymbol{M}$, ${}_2\boldsymbol{M}$ eine asymptotische Berührung der Ordnung k besitzen, so gilt nach Satz 1

$$(3.6) \qquad \mathrm{cl}\,{}_1^r\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2^r\mathfrak{M} = \emptyset \quad (r = 1, \ldots, k - 1)\,, \quad {}_1^k\mathfrak{M} \cap {}_2^k\mathfrak{M} = \emptyset\,,$$
$$\mathrm{cl}\,{}_1^k\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\,{}_2^k\mathfrak{M} \neq \emptyset$$

---

[2]) Nach (2.15), [4] ist hier $\mathrm{cl}\,{}_i^0\mathfrak{M} = {}_i\boldsymbol{M}$ $(i = 1, 2)$ zu setzen.

und somit auch rel. int $(\mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}_2^k\mathfrak{M}) = \emptyset$. Nach Definition 2.1, [2], **berühren** sich die Mengen $\mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M}$, $\mathrm{cl}\, {}_2^k\mathfrak{M}$ in jedem Punkt ${}_0\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}_2^k\mathfrak{M}$ und nach Satz 2.4, [2], gibt es dann einen Vektor $\boldsymbol{y}$ ($\|\boldsymbol{y}\| = 1$) in der Weise, dass

$$ {}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in {}^k\boldsymbol{L}\,, \quad \min_{\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\, {}_1{}^k\mathfrak{M}} \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} = ({}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\, {}_2{}^k\mathfrak{M}} \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} $$

gilt, wobei ${}^k\boldsymbol{L}$ die lineare Hülle von $\mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M} \cup \mathrm{cl}\, {}_2^k\mathfrak{M}$ bedeutet. Nach Bemerkung 2 folgt daraus zuerst ${}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ und weiter

$$ \mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M} \subset \mathrm{cl}\, \boldsymbol{H}^+ = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0\}\,, \tag{3.7} $$

wobei $\mathrm{cl}\, \boldsymbol{H}^+$ einer der abgeschlossenen Halbräume die der Hyperebene

$$ \boldsymbol{R} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}_n \mid (\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\} $$

angehören ist. Aus (3.7) und (3.3) ergibt sich

$$ (\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\, {}_1^r\mathfrak{M} \quad (r = 0, \ldots, k-1)\,. \tag{3.8} $$

Nach der Definition der Recessionskegel folgt aus (3.3)

$$ ((\mathrm{cl}\, {}_1^{r-1}\mathfrak{M})_{\boldsymbol{R}} \cap (\mathrm{cl}\, {}_2^{r-1}\mathfrak{M})_{\boldsymbol{R}}) \subset ((\mathrm{cl}\, {}_1^r\mathfrak{M})_{\boldsymbol{R}} \cap (\mathrm{cl}\, {}_2^r\mathfrak{M})_{\boldsymbol{R}}) \quad (r = 1, \ldots, k-1)\,, $$

und somit ist für die linearen Hüllen dieser Kegel

$$ \boldsymbol{L}_{d^{r-1}}(\boldsymbol{o}) \subset \boldsymbol{L}_{d^r}(\boldsymbol{o}) \quad (r = 1, \ldots, k-1)\,. $$

Daraus folgt

$$ \boldsymbol{L}_{d^{r-1}}(\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{L}_{d^r}(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in {}_1^{r+1}\mathfrak{M} \quad (r = 1, \ldots, k-1)\,. \tag{3.9} $$

Da nach (2.15), [4], $\boldsymbol{L}_{d^{k-1}}(\boldsymbol{x}) \subset {}_1^k\mathfrak{M}$ für alle $\boldsymbol{x} \in {}_1^k\mathfrak{M}$ gilt, so gilt auch $\boldsymbol{L}_{d^{k-1}}(\boldsymbol{x}) \subset \mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M}$ und nach (3.7) ist dann der lineare Unterraum $\boldsymbol{L}_{d^{k-1}}(\boldsymbol{x})$ zu der Hyperebene $\boldsymbol{R}$ parallel, bzw. liegt er in $\boldsymbol{R}$. Nach (3.9) folgt daraus, dass auch jeder der linearen Unterräume $\boldsymbol{L}_{d^{r-1}}(\boldsymbol{x})$ $(r = 1, \ldots, k-1)$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M}$ parallel zu $\boldsymbol{R}$ ist, bzw. in $\boldsymbol{R}$ liegt. Da nach der Wahl der Punkt ${}_0\boldsymbol{x}$ ein Randpunkt von $\mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M}$ ist, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Punkt $\boldsymbol{x}' \in {}_1^k\mathfrak{M}$ mit

$$ \varrho(\boldsymbol{L}_{d^{k-1}}(\boldsymbol{x}'); \boldsymbol{L}_{d^{k-1}}({}_0\boldsymbol{x})) < \varepsilon\,. $$

Nach der sukzessiven Definition (2.15), [4], der Mengen ${}_1^r\mathfrak{M}$ und nach (3.9) gibt es dann Punkte ${}_r\boldsymbol{x} \in \mathrm{cl}\, {}_1^r\mathfrak{M}$ mit

$$ {}_r\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_{d^{k-1}}(\boldsymbol{x}')\,, \quad \varrho(\boldsymbol{L}_{d^r}({}_r\boldsymbol{x})\,; \ \boldsymbol{L}_{d^{k-1}}({}_0\boldsymbol{x})) < \varepsilon \quad (r = 0, \ldots, k-1)\,. $$

Bezeichnet man mit ${}_r\boldsymbol{R}$ diejenige Hyperebene, die mit $\boldsymbol{R}$ parallel ist und den Punkt ${}_r\boldsymbol{x}$ enthält $(r = 0, \ldots, k-1)$, so gilt nach (3.7)

$$ \boldsymbol{L}_{d^r}({}_r\boldsymbol{x}) \subset {}_r\boldsymbol{R}\,, \quad \varrho({}_r\boldsymbol{R}; \boldsymbol{L}_{d^{k-1}}({}_0\boldsymbol{x})) = \varrho({}_r\boldsymbol{R}; {}_0\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}\|} \cdot |({}_0\boldsymbol{x} - {}_r\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = $$

$$ = ({}_r\boldsymbol{x} - {}_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqq \varrho(\boldsymbol{L}_{d^r}({}_r\boldsymbol{x}); \boldsymbol{L}_{d^{k-1}}({}_0\boldsymbol{x})) < \varepsilon\,. $$

Daraus und aus (3.8) folgt

$$({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\, {}_1{}^r\mathfrak{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \quad (r = 0, \ldots, k-1)\,.$$

Auf ähnliche Art und Weise kann die Gleichheit

$$({}_0\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\, {}_2{}^r\mathfrak{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \quad (r = 0, \ldots, k-1)$$

bewiesen werden. Nach (3.6) ist $\mathrm{cl}\, {}_1^r\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}_2^r\mathfrak{M} = \emptyset$ und daher ${}_0\mathbf{x} \notin \mathrm{cl}\, {}_1^r\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}_2^r\mathfrak{M}$ $(r = 0, \ldots, k-1)$ und mit Hinsicht auf (3.3) folgt dann daraus die restliche Behauptung aus der Bedingung b).

Falls andererseits die Bedingungen a), b) erfüllt sind, so folgt aus der Bedingung b) $\mathrm{cl}\, {}_1^r\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}_2^r\mathfrak{M} = \emptyset$ $(r = 0, \ldots, k-1)$ und nach dem Beweis des Satzes 5, [3], gilt dann ${}_1^k\mathfrak{M} \cap {}_2^k\mathfrak{M} = \emptyset$. Daraus und aus Bedingung a) folgt dann nach Satz 1, dass die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ eine Berührung der Ordnung k besitzen.

Satz 3. *Es seien* ${}_i\mathbf{M} \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$ *abgeschlossene, konvexe Mengen in* $\mathbf{E}_n$, *die eine asymptotische Berührung der Ordnung* k $(1 \leqq k \leqq n-1)$ *besitzen. Bezeichnet man mit* $\mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_i{}^r\mathfrak{M}}$ *das sphärische Bild der Menge* $\mathrm{cl}\, {}_i^r\mathfrak{M}$ $(i = 1, 2;\ r = 0, \ldots, k)$, *so gilt für den Vektor* $\mathbf{y}$ *aus Satz* 2

a) $-\mathbf{y} \in \mathrm{cl}\, \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_1{}^r\mathfrak{M}}\,, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{cl}\, \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2{}^r\mathfrak{M}} \quad (r = 0, \ldots, k-1)\,;$

b) $-\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_1{}^k\mathfrak{M}}\,, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2{}^k\mathfrak{M}}\,,$

wobei entweder $-\mathbf{y} \in \mathrm{cl}\, \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_1{}^r\mathfrak{M}} \setminus \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_1{}^r\mathfrak{M}}$, *oder* $\mathbf{y} \in \mathrm{cl}\, \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2{}^r\mathfrak{M}} \setminus \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2{}^r\mathfrak{M}}$ $(r = 0, \ldots, k-1)$ *ist.*

Beweis. Aus der Voraussetzung ergibt sich auf Bemerkung 1, dass die Mengen $\mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M}$, $\mathrm{cl}\, {}_2^k\mathfrak{M}$ sich in jedem Punkt ${}_0\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\, {}_2^k\mathfrak{M}$ berühren. Nach Satz 2.1, [2], folgt daraus die Existenz eines Vektors $\mathbf{y}$ $(\|\mathbf{y}\| = 1)$ (der nach Satz 2.1 und Satz 2.4, [2], mit dem Vektor $\mathbf{y}$ aus Satz 2 identisch ist) mit der Eigenschaft

$$-\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_1{}^k\mathfrak{M}}\,, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2{}^k\mathfrak{M}}\,.$$

Daraus folgt

$$(3.10) \quad -\mathbf{y} \in \mathrm{cl}\, \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_1{}^k\mathfrak{M}} = {}^p(\mathrm{cl}\, {}_1^k\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap \mathbf{Q}\,, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{cl}\, \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2{}^k\mathfrak{M}} = {}^p(\mathrm{cl}\, {}_2^k\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap \mathbf{Q}\,.$$

Da nach (3.3) $\mathrm{cl}\, {}_i^r\mathfrak{M} \subset \mathrm{cl}\, {}_i^k\mathfrak{M}$ gilt, so gilt auch $(\mathrm{cl}\, {}_i^r\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \subset (\mathrm{cl}\, {}_i^k\mathfrak{M})_{\mathbf{R}}$ und für die zugehörigen Polarkegel ergibt sich ${}^p(\mathrm{cl}\, {}_i^r\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \supset {}^p(\mathrm{cl}\, {}_i^k\mathfrak{M})_{\mathbf{R}}$ $(i = 1, 2;\ r = 0, \ldots, k-1)$. Daraus und aus (3.10) folgt unmittelbar

$$-\mathbf{y} \in \mathrm{cl}\, \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_1{}^r\mathfrak{M}}\,, \quad \mathbf{y} \in \mathrm{cl}\, \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2{}^r\mathfrak{M}} \quad (r = 0, \ldots, k-1)\,.$$

Nach Satz 4, [1], stellt die Menge $\mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_i{}^r\mathfrak{M}}$ den maximalen Definitionsbereich der Funktion

$$\varphi_i(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in \mathrm{cl}\, {}_i{}^r\mathfrak{M}} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}\,, \quad \|\mathbf{y}\| = 1 \quad (i = 1, 2;\ r = 0, \ldots, k)\,.$$

Es ist klar, dass auch $\mathbf{S}_{\mathrm{cl}\ {}_1{}^r\mathfrak{M}}$ der maximale Definitionsbereich der Funktion $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathrm{cl}\ {}_1{}^r\mathfrak{M}} \{(\mathbf{x}, -\mathbf{y})\}$, $\|\mathbf{y}\| = 1$, $(r = 0, \ldots, k)$ ist. Nach der Bedingung b) des Satzes 2 folgt dann daraus unmittelbar die Behauptung b) unseren Satzes.

Beispiel. Die Mengen

$$ {}_1\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x + y^2 \leqq 0\}, \quad {}_2\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid z \leqq \lg x,\ x > 0,\ y = 0\} $$

sind offenbar abgeschlossene, konvexe Mengen in $\mathbf{E}_3$ mit der Eigenschaft ${}_1\mathbf{M} \cap {}_2\mathbf{M} = \emptyset$, $\varrho({}_1\mathbf{M}; {}_2\mathbf{M}) = 0$, $\dim {}_1\mathbf{M} = 3$, $\dim {}_2\mathbf{M} = 2$ und sie besitzen daher eine asymptotische Berührung in Sinne der Definition 1, [4]. Man berechnet für sie

$$ {}_1\mathbf{M_R} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \leqq 0,\ y = 0\}, \quad {}_2\mathbf{M_R} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \geqq 0,\ y = 0,\ z \leqq 0\}, $$

$$ {}_1\mathbf{M_R} \cap {}_2\mathbf{M_R} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0,\ y = 0,\ z \leqq 0\}, \quad d^0 = \dim({}_1\mathbf{M_R} \cap {}_2\mathbf{M_R}) = 1, $$

$$ \mathbf{L}_{d^0}(\mathbf{o}) = \mathbf{L}_1(\mathbf{o}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0,\ y = 0\}, $$

$$ {}_1^1\mathfrak{M} \equiv {}_1\mathfrak{M} = {}_1\mathbf{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x + y^2 \leqq 0\} = \mathrm{cl}\ {}_1^1\mathfrak{M}, $$

$$ {}_2^1\mathfrak{M} \equiv {}_2\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x > 0,\ y = 0\}, \quad \mathrm{cl}\ {}_2^1\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \geqq 0,\ y = 0\}, $$

$$ \mathrm{cl}\ {}_1^1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\ {}_2^1\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0,\ y = 0\}. $$

Die Mengen ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ haben daher eine asymptotische Berührung der Ordnung 1. Für die Polarkegel ${}^p({}_i\mathbf{M_R})$ zu den Recessionskegeln ${}_i\mathbf{M_R}$ $(i = 1, 2)$ gilt

$$ {}^p({}_1\mathbf{M_R}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \geqq 0,\ z = 0\}, \quad {}^p({}_2\mathbf{M_R}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \leqq 0,\ z \geqq 0\} $$

und daher

$$ \mathrm{cl}\ \mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} = {}^p({}_1\mathbf{M_R}) \cap \mathbf{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1,\ x \geqq 0,\ z = 0\}, $$

$$ \mathrm{cl}\ \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}} = {}^p({}_2\mathbf{M_R}) \cap \mathbf{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1,\ x \leqq 0,\ z \geqq 0\}. $$

Aufgrund der Definition des sphärischen Bildes einer nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Menge kann man sich überzeugen, dass

$$ \mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1,\ x > 0,\ z = 0\} = \mathrm{cl}\ \mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} $$

mit $\mathrm{A} = (0, 1, 0)$, $\mathrm{B} = (0, -1, 0)$,

$$ \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1,\ x < 0,\ z > 0\} \cup \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}. $$

Weiter gilt

$$ (\mathrm{cl}\ {}_1^1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} = {}_1\mathbf{M_R} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \leqq 0,\ y = 0\}, \quad (\mathrm{cl}\ {}_2^1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} = \mathrm{cl}\ {}_2^1\mathfrak{M} = $$
$$ = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \geqq 0,\ y = 0\}, $$

$$ (\mathrm{cl}\ {}_1^1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\ {}_2^1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0,\ y = 0\}, \quad d^1 = \dim(\mathrm{cl}\ {}_1^1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} \cap (\mathrm{cl}\ {}_2^1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} = 1, $$

$$ {}^1d' = \dim(\mathrm{cl}\ {}_1^1\mathfrak{M} \cap \mathrm{cl}\ {}_2^1\mathfrak{M}) = 1. $$

Die entsprechende asymptotische Berührung von ${}_1\mathbf{M}$, ${}_2\mathbf{M}$ wird hier also durch das Tripel $(k, d, {}^1d') = (1, 1, 1)$ charakterisiert. Wir berechnen weiter

$$ {}^p(\mathrm{cl}\ {}_1^1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} = {}^p({}_1\mathbf{M_R}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \geqq 0,\ z = 0\}, \quad {}^p(\mathrm{cl}\ {}_2^1\mathfrak{M})_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x \leqq 0,\ z = 0\}, $$

$$ \mathrm{cl}\ \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\ {}_1{}^1\mathfrak{M}} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1,\ x \geqq 0,\ z = 0\}, $$

$$\operatorname{cl} \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2{}^1\mathfrak{M}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1, x \leqq 0, z = 0 \} ,$$

$$\mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_1{}^1\mathfrak{M}} = \mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1, x > 0, z = 0 \} = \operatorname{cl} \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}^1{}_1\mathfrak{M}} \setminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} ,$$

$$\mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2{}^1\mathfrak{M}} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1, x \leqq 0, z = 0 \} = \operatorname{cl} \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}^1{}_2\mathfrak{M}} .$$

In unserem Fall ist z. B. der Vektor $\mathbf{y} = (-1, 0, 0)$ ein Vektor mit der Eigenschaft aus Satz 2, 3, denn es gilt für ihn bei beliebiger Wahl des Punktes ${}_0\mathbf{x} \in \operatorname{cl} {}_1^1\mathfrak{M} \cap$ $\cap \operatorname{cl} {}_2^1\mathfrak{M} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_3 \mid x = 0, y = 0 \}$

$$\inf_{\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M}} \{-x\} = \min_{\mathbf{x} \in {}_1\mathbf{M}} \{-x\} = -{}_0x = 0 = \sup_{\mathbf{x} \in {}_2\mathbf{M}} \{-x\} .$$

Nach Satz 3 ist

$$-\mathbf{y} = (1, 0, 0) \in \mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} \subset \operatorname{cl} \mathbf{S}_{{}_1\mathbf{M}} , \quad \mathbf{y} = (-1, 0, 0) \in \operatorname{cl} \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}} \setminus \mathbf{S}_{{}_2\mathbf{M}} , \quad -\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_1\mathfrak{M}} ,$$
$$\mathbf{y} \in \mathbf{S}_{\mathrm{cl}\, {}_2\mathfrak{M}} .$$

Literatur

[1] *L. Grygarová:* Sphärische Abbildung konvexer abgeschlossenen Mengen in E_n und ihre charakteristische Eigenschaften. Aplikace matematiky 23 (1978), 115—131.

[2] *L. Grygarová:* Über Punktberührung von konvexen Mengen. Aplikace matematiky 23 (1978), 453—466.

[3] *L. Grygarová:* Asymptotische Berührung von zwei konvexen Mengen in (bestimmter) Richtung. Aplikace matematiky 24 (1979), 32—47.

[4] *L. Grygarová:* Asymptotische Berührung k-ter Ordnung konvexer Mengen. Aplikace matematiky 25 (1980), 209—220.

Souhrn

K ASYMPTOTICKÉMU STYKU KONVEXNÍCH MNOŽIN

LIBUŠE GRYGAROVÁ

V práci se ukazuje, že problém asymptotického styku k-tého řádu dvou uzavřených, konvexních množin v $\mathbf{E}_n$ se dá určitým procesem převést na problém bodového styku jiné dvojice uzavřených konvexních množin v $\mathbf{E}_n$. Na základě tohoto poznatku jsou odvozeny věty analogické těm větám, které charakterizovaly bodový styk množin. Protože asymptotický styk v určitém směru dvou uzavřených konvexních množin v $\mathbf{E}_n$ je speciálním případem asymptotického styku k-tého řádu těchto množin, platí příslušná tvrzení i v tomto případě.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Libuše Grygarová*, CSc., Matematicko-fysikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.