

Aplikace matematiky

Willibald Doeringer

Zu einem Resultat von K. Lommatzsch über allgemeine quadratische Optimierungsprobleme

Aplikace matematiky, Vol. 28 (1983), No. 3, 173--176

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104023>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1983

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ZU EINEM RESULTAT VON K. LOMMATZSCH
 ÜBER ALLGEMEINE QUADRATISCHE OPTIMIERUNGSPROBLEME

WILLIBALD DOERINGER

(Eingegangen 22. März 1982)

In seinem Artikel „Ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für allgemeine quadratische Optimierungsprobleme“ ([1]; vgl. dazu auch [2], § 7) untersucht K. Lommatzsch das folgende Optimierungsproblem

$$(1) \quad \min \{f(x, x) \mid x \in M\}$$

für eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge M des \mathbb{R}^n und

$$(2) \quad f(x, x) = x'Cx + 2p'x$$

mit einer reellen, symmetrischen $(n \times n)$ -Matrix C und einem festen Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ – dabei sei wie üblich für $x \in \mathbb{R}^n$ $x' = (x_1, \dots, x_n)$. Er führt in Anlehnung an die Lineare Parametrische Optimierung (vgl. [3], [4]) sogenannte Stabilitätsmengen $K_M^{\bar{x}}$ ein gemäß

$$(3) \quad K_M^{\bar{x}} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (Cy + p)'(x - \bar{x}) \geq 0, x \in M\}$$

und folgert mit den Bezeichnungen

Definition. 1. Ein Punkt $x^0 \in M$ heißt (strenger) lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1), falls eine Umgebung $U(x^0)$ von x^0 – stets in der üblichen Topologie des \mathbb{R}^n – existiert, sodaß für alle $x \in M \cap U(x^0)$, $x \neq x^0$, gilt: $f(x, x) \geq f(x^0, x^0)$ ($f(x, x) > f(x^0, x^0)$).

das Resultat (vgl. [1], (13) und (17))

Satz 1. Ist der Punkt $x^0 \in M$ ein lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1), so gilt:

$$(a) \quad x^0 \in K_M^{x^0}$$

und

$$(b) \quad \text{aus } x^0 \in K_M^{\bar{x}} \text{ für ein } \bar{x} \in M - \{x^0\} \text{ folgt stets } \bar{x} \notin K_{[x^0, \bar{x}]}^{\bar{x}} \text{ oder } \bar{x} \in K_{[x^0, \bar{x}]}^{\bar{x}} \cap K_{[x^0, \bar{x}]}^{x^0} \text{ (dabei bezeichnet } [x^0, \bar{x}] \text{ die Menge } \{x \in M \mid x = \lambda x^0 + (1 - \lambda)\bar{x}, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Der Umstand, daß bei einer positiv-semidefiniten Matrix C – d.h. $f(x, x)$ ist eine konvexe Funktion – die Beziehung $x^0 \in K_M^{x^0}$, $x^0 \in M$, bereits hinreichend ist für die globale Optimalität von x^0 für die Aufgabe (1), führt nun zu der Vermutung, daß die notwendigen Bedingungen aus Satz 1 zumindest für lokale Optimalität hinreichend sind, wie Lommatzsch auch in [1], (18) formuliert. Das nachfolgende Beispiel zeigt, daß dies i.a. leider nicht der Fall ist.

Beispiel. Wähle auf dem \mathbb{R}^2 die Funktion $F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = -(x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1)$ und $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, 1 \geq x_2 \geq 0, x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4\}$. Man erkennt sofort, daß $x^0 = (0, 0)'$ kein lokaler Optimalpunkt der entsprechenden Aufgabe (1) ist, aber $x^0 \in K_M^{x^0}$ und $x^0 \notin K_M^x$ für alle $x \in M - \{x^0\}$ gilt. Die Bedingungen aus Satz 1 sind somit nicht hinreichend für lokale Optimalität.

Es bleibt somit das Problem, Voraussetzungen zu finden, die solche Beispiele ausschließen – dies führte zu folgender Begriffsbildung:

Definition 2. M heißt lokal-polyedrisch bezüglich $x^0 \in M$, wenn eine Umgebung $U(x^0)$ von x^0 existiert, so daß $U(x^0) \cap M$ ein Polyeder ist.

Man beachte, daß M insbesondere lokal-polyedrisch ist bezüglich jedes relativ inneren Punktes. – Wir können nun zeigen

Satz 2. Sei $x^0 \in K_M^{x^0}$ und M lokal-polyedrisch bezüglich x^0 ; dann gelten folgende Aussagen:

(a) Ist $x^0 \notin K_M^x$ für alle $x \in M - \{x^0\}$, so ist x^0 ein strenger lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1),

und

(b) folgt aus $x^0 \in K_M^{\bar{x}}$, $\bar{x} \in M - \{x^0\}$, stets $\bar{x} \notin K_{[x^0, \bar{x}]}^{\bar{x}}$ oder $\bar{x} \in K_{[x^0, \bar{x}]}^{x^0} \cap K_{[x^0, \bar{x}]}^{\bar{x}}$ so ist x^0 ein lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1).

Beweis von Satz 2. Zunächst gilt für alle $x \in M$

$$(4) \quad (Cx^0 + p)'(x - x^0) \geq 0$$

und

$$(5) \quad \text{aus } (Cx^0 + p)'(x - x^0) = 0 \text{ folgt stets } (Cx + p)'(x - x^0) \geq 0 \text{ und } (x - x^0)'C(x - x^0) \geq 0.$$

Denn (4) gibt gerade die Voraussetzung $x^0 \in K_M^{x^0}$ wieder und (5) läßt sich so einsehen: Ist $(Cx^0 + p)'(x - x^0) = 0$ für ein $x \in M$, so folgt wegen (4) $x^0 \in K_M^x$ – im Falle (a) folgt also stets für alle $x \in M - \{x^0\}$ $(Cx^0 + p)'(x - x^0) > 0$ – und wegen der Voraussetzung aus (b) ergibt sich für $x \notin K_{[x^0, x]}^x$ sofort $(Cx + p)'(x - x^0) > 0$ und für $x \in K_{[x^0, x]}^{x^0} \cap K_{[x^0, x]}^x$ schließlich $(Cx + p)'(x - x^0) = 0$. Und weiter erhalten wir aus $(Cx^0 + p)'(x - x^0) = 0$, daß $(C(x - x^0) + Cx^0 + p)'(x - x^0) \geq 0$ gilt, mithin also $(x - x^0)'C(x - x^0) \geq 0$.

Wählen wir nun eine Folge (x^k) , $k \in \mathbb{N}$, in M mit $x^k \rightarrow x^0$, $k \rightarrow \infty$, so können wir,

da M als lokal-polyedrisch bezüglich x^0 vorausgesetzt ist, Elemente x_1, \dots, x_r und y_{r+1}, \dots, y_{r+l} in M so finden, daß für $k \geq k_0$ gilt:

$$x^k = \lambda_1^k x_1 + \dots + \lambda_r^k x_r + \mu_{r+1}^k y_{r+1} + \dots + \mu_{r+l}^k y_{r+l}$$

mit
$$\lambda_k^i \geq 0, \quad \mu_j^k \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i^k + \sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k = 1$$

und

$$(6) \quad (Cx^0 + p)'(x_i - x^0) = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

bzw.

$$(7) \quad (Cx^0 + p)'(y_j - x^0) > 0, \quad j = r+1, \dots, r+l.$$

Es folgt dann notwendig

$$(8) \quad \mu_j^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 1, \dots, r+l$$

insbesondere also

$$(9) \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i^k x_i \rightarrow x^0, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i^k \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty.$$

Beachtet man nun, daß (für $k \geq k_0$) $f(x^k, x^k)$ die folgende Darstellung besitzt:

$$\begin{aligned} f(x^k, x^k) &= f(x^0, x^0) + \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^k (x_i - x^0) \right)' C \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^k (x_i - x^0) \right) + \\ &+ 2 \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^k (x_i - x^0) \right)' C \left(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0) \right) + \left(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0) \right)' C \cdot \\ &\cdot \left(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0) \right) + 2(Cx^0 + p)' \left(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0) \right) \end{aligned}$$

so liefert (5) folgende Abschätzung für $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} f(x^k, x^k) - f(x^0, x^0) &\geq 2 \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i^k (x_i - x^0) \right)' C \left(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0) \right) + \\ &+ \left(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0) \right)' C \left(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0) \right) + 2(Cx + p)' \left(\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k (y_j - x^0) \right) \geq \\ &\geq \varepsilon \sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k + (\mu_{r+1}^k, \dots, \mu_{r+l}^k) \hat{C}(\mu_{r+1}^k, \dots, \mu_{r+l}^k)' \end{aligned}$$

für geeignetes $\varepsilon > 0$ und reelle, symmetrische $(l \times l)$ -Matrix \hat{C} und für alle $k \geq k_1 \geq k_0$. Dabei folgt die zweite Ungleichung aus (7), (8) und (9). Beachtet man noch $\mu_j^k \geq 0$, so erhält man für hinreichend großes k_2 :

$$f((x^k, x^k) - f(x^0, x^0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k, \quad k \geq k_2.$$

Im Falle (b) des Satzes 2 folgt hieraus sofort, daß für $k \geq k_2$ $f(x^k, x^k) \geq f(x^0, x^0)$ gilt, d.h. x^0 ist ein lokaler Optimalpunkt der Aufgabe (1). Und im Falle (a) folgt für $x \in M - \{x^0\}$ notwendig $\sum_{j=r+1}^{r+l} \mu_j^k > 0$, $k \geq k_0$ - d.h., x^0 ist ein strenger lokaler

Optimalpunkt der Aufgabe (1).

Der Satz 2 ist damit vollständig bewiesen.

Literatur

- [1] K. Lommatzsch: Ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für allgemeine quadratische Optimierungsprobleme. *Apl. Mat.* 19 (1974), 193–197.
- [2] K. Lommatzsch (Hrsg.): *Anwendungen der Linearen Parametrischen Optimierung*. Birkhäuser-Verlag Stuttgart und Basel, 1979.
- [3] F. Nožička, J. Guddat, B. Bank, H. Hollatz: *Theorie der Linearen Parametrischen Optimierung*. Akademie-Verlag Berlin, 1974.
- [4] F. Nožička, J. Guddat, H. Hollatz: *Theorie der Linearen Optimierung*. Akademie-Verlag Berlin, 1972.

Souhrn

K JEDNOMU VÝSLEDKU K. LOMMATZSCHE O OBECNÝCH PROBLÉMECH KVADRATICKÉ OPTIMALIZACE

WILLIBALD DOERINGER

V práci je odvozena postačující podmínka lokální optimality pro problémy kvadratické optimalizace. Autor užívá pojmu stabilní množiny, kterou zavedl K. Lommatzsch v souvislosti s problémy lineární parametrické optimalizace.

Anschrift des Verfassers: Willibald Doeringer, Dipl.-Math., Tesdata, Gesellschaft für Datenverarbeitung m.b.H., Am Lindenbaum 24, D-6000 Frankfurt a. Main 50.