

Július Cibula

Équations de von Kármán. II. Approximation de la solution

*Aplikace matematiky*, Vol. 30 (1985), No. 1, 1--10

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104123>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1985

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

EQUATIONS DE VON KÁRMÁN

II. APPROXIMATION DE LA SOLUTION

JULIUS CIBULA

(Recu le 25 novembre 1983)

1. INTRODUCTION

Dans cet article, nous utiliserons les désignations de [1]. Dans la suite, on pose:

$$(1.1) \quad W = W_0^{2,2}(\Omega).$$

Les solutions variationnelles (excessives)  $(w, f) \in V \times W$  du problème (1.1)–(1.7) dans [1] vérifient:

$$(1.2) \quad w = Lw + C_1(f, w) + q^* \quad \text{dans } V,$$

$$(1.3) \quad f = -C_2(w, w) \quad \text{dans } W.$$

L'opérateur bilinéaire  $C_2: V \times V \rightarrow W$  est continu (cf. le Lemme 4.3 dans [1]). Alors, il existe une constante  $\|C_2\| > 0$  telle que:

$$(1.4) \quad \|C_2(w, \bar{w})\|_W \leq \|C_2\| \|w\|_V \|\bar{w}\|_V,$$

pour tout couple  $(w, \bar{w}) \in V \times V$ .  $\|C_2\|$  est dite norme de l'opérateur  $C_2$ .

2. CAS D'UNICITE

Nous donnerons quelques conditions suffisantes pour l'unicité locale et globale de la solution du problème.

Soient  $(w, f)$  et  $(\bar{w}, \bar{f})$  deux solutions variationnelles (excessives) du problème et:

$$(2.1) \quad \bar{w} = w + h \quad \text{dans } V,$$

$$(2.2) \quad \bar{f} = f + g \quad \text{dans } W.$$

Grâce à (1.2), (1.3), (2.1) et (2.2), on a :

$$(2.3) \quad h = Lh + C_1(f, h) + C_1(g, w) + C_1(g, h) \quad \text{dans } V,$$

$$(2.4) \quad g = -2C_2(w, h) - C_2(h, h) \quad \text{dans } W,$$

par la linéarité de l'opérateur  $L$ , la bilinéarité des opérateurs  $C_1$ ,  $C_2$  et la symétrie de  $C_2$ . En faisant le produit scalaire par  $h$  dans (2.3) et par  $g$  dans (2.4), on obtient :

$$(2.5) \quad \|h\|_V^2 = (Lh, h)_V + (C_2(h, h), f)_W + (C_2(w, h), g)_W + (C_2(h, h), g)_W,$$

$$(2.6) \quad \|g\|_W^2 = -2(C_2(w, h), g)_W - (C_2(h, h), g)_W,$$

grâce à (4.1) dans [1]. On voit de (2.5) et (2.6) que :

$$(2.7) \quad 2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 = 2(Lh, h)_V + 2(C_2(h, h), f)_W + (C_2(h, h), g)_W.$$

D'après [1], on sait que le couple  $|w, \Phi| \in V \times W^{2,2}(\Omega)$  est une solution variationnelle si :

$$(2.8) \quad \Phi = f + F,$$

où  $|w, f| \in W$  est une solution variationnelle excessive et  $F$  est une fonction de  $W^{2,2}(\Omega)$  vérifiant (2.7), (2.8) dans [1].

**Théorème. 1.** (i) Soit  $|w, \Phi| \in V \times W^{2,2}(\Omega)$  une solution variationnelle du problème vérifiant :

$$(2.9) \quad B(\Phi; h, h) \leq 0,$$

pour tout  $h \in V$ . Alors :

$$(2.10) \quad \|\bar{w} - w\|_V \geq 2\sqrt{2} \|C_2\|^{-1},$$

$$(2.11) \quad \|\bar{\Phi} - \Phi\|_{W^{2,2}} \geq 2\|C_2\|^{-1},$$

pour toutes solutions variationnelles du problème  $|\bar{w}, \bar{\Phi}| \neq |w, \Phi|$ .

(ii) Le problème possède une solution unique si l'inégalité (2.9) est satisfaite pour toute solution variationnelle  $|w, \Phi| \in V \times W^{2,2}(\Omega)$  et tout  $h \in V$ .

Démonstration. (i) Par (3.7), (3.13) et (3.15) dans [1], on a :

$$\begin{aligned} (C_2(h, h), f)_W &= B(h; h, f) = B(f; h, h), \\ (Lh, h)_V &= B(F; h, h), \end{aligned}$$

et donc :

$$(2.12) \quad (C_2(h, h), f)_W + (Lh, h)_V = B(\Phi; h, h),$$

d'après (2.8). Les relations (2.9) et (2.12) reportées dans (2.7) donnent :

$$2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 \leq (C_2(h, h), g)_W.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.4), on obtient:

$$(2.13) \quad 2\|h\|_V^2 - \|C_2\| \|h\|_V^2 \|g\|_W + \|g\|_W^2 \leq 0.$$

On déduit de (2.13) que:

$$\|h\|_V \geq 2\sqrt{(2)} \|C_2\|^{-1} \quad \text{et} \quad \|g\|_W \geq 2\|C_2\|^{-1}.$$

Grâce à (2.1), (2.2) et (2.8), on conclut (2.10) et (2.11) avec:

$$(2.14) \quad \bar{\Phi} = \bar{f} + F.$$

(ii) Soient  $|w, \Phi|$  et  $|\bar{w}, \bar{\Phi}|$  deux solutions variationnelles du problème satisfaisant (2.9). Alors, on a (2.12) et:

$$(2.15) \quad (C_2(h, h), \bar{f})_W + (Lh, h)_V = B(\bar{\Phi}; h, h),$$

$$(2.16) \quad (C_2(h, h), f)_W + (C_2(h, h), g)_W = (C_2(h, h), \bar{f})_W,$$

par (2.2). Les égalités (2.12), (2.15) et (2.16) reportées dans (2.7) donnent:

$$(2.17) \quad 2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 = B(\Phi; h, h) + B(\bar{\Phi}; h, h).$$

Par (2.9), on a:

$$(2.18) \quad 2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 \leq 0.$$

On conclut de (2.18) que:

$$h = 0 \quad \text{dans } V, \quad g = 0 \quad \text{dans } W,$$

et donc:

$$w = \bar{w} \quad \text{dans } V, \quad \Phi = \bar{\Phi} \quad \text{dans } W^{2,2}(\Omega),$$

par (2.1), (2.2), (2.8) et (2.14).

Remarque 1. Avec la condition suffisante:

$$(2.19) \quad (i) \quad \Phi_{xx} \geq 0, \quad \Phi_{yy} \geq 0 \quad \text{et} \quad \Phi_{xx}\Phi_{yy} \geq [\Phi_{xy}]^2,$$

presque partout dans  $\Omega$ , ou:

$$(2.20) \quad (ii) \quad \frac{\delta^2 \Phi}{\delta m^2} = \Phi_{xx} m_x^2 + 2\Phi_{xy} m_x m_y + \Phi_{yy} m_y^2 \geq 0,$$

presque partout dans  $\Omega$ , pour tout vecteur unitaire  $\bar{m} = (m_x, m_y)$ , on a (2.9). En effet, on a:

$$(2.21) \quad B(\Phi; h, h) = \int_{\Omega} [-\Phi_{xx} h_y^2 + 2\Phi_{xy} h_x h_y - \Phi_{yy} h_x^2] dx dy,$$

par notation de  $B$  dans [1]. (i) Il découle de (2.19) que:

$$|\Phi_{xy}| \leq [\Phi_{xx}]^{1/2} [\Phi_{yy}]^{1/2} \quad \text{sur } \Omega,$$

et, par conséquent, on obtient:

$$\begin{aligned} & -\Phi_{xx}h_y^2 + 2\Phi_{xy}h_xh_y - \Phi_{yy}h_x^2 \leq \\ & \leq -\Phi_{xx}h_y^2 + 2[\Phi_{xx}]^{1/2} [\Phi_{yy}]^{1/2} |h_x| |h_y| - \Phi_{yy}h_x^2 \leq 0 \quad \text{sur } \Omega . \end{aligned}$$

Cette inégalité avec (2.21) fournit (2.9).

(ii) Si  $h_x = h_y = 0$ , on a (2.9) évidemment. Si  $h_x \neq 0$  ou  $h_y \neq 0$ , on pose:

$$m_x = [h_x^2 + h_y^2]^{-1/2} h_y, \quad m_y = -[h_x^2 + h_y^2]^{-1/2} h_x \quad \text{sur } \Omega .$$

Par ces égalités, (2.20) et (2.21), on a (2.9).

**Théorème 2.** (i) Soit  $|w, \Phi| \in V \times W^{2,2}(\Omega)$  une solution variationnelle du problème vérifiant:

$$(2.22) \quad \max_{\bar{\Omega}} |\Phi| \leq \frac{1 - \sigma}{2} .$$

Alors:

$$(2.23) \quad \|\bar{w} - w\|_V \geq 2 \|C_2\|^{-1} ,$$

$$(2.24) \quad \|\bar{\Phi} - \Phi\|_{W^{2,2}} \geq \|C_2\|^{-1} ,$$

pour toutes solutions variationnelles du problème  $|\bar{w}, \bar{\Phi}| \neq |w, \Phi|$ .

(ii) Le problème possède une solution unique si l'inégalité (2.22) est satisfaite pour toute solution variationnelle  $|w, \Phi| \in V \times W^{2,2}(\Omega)$ .

Démonstration. (i) Grâce au Lemme 4.7 dans [1] et par la formule de Green, on a:

$$(2.25) \quad (Lh, h)_V + (C_2(h, h), f)_W \leq \int_{\Omega} [h, h] \Phi \, dx \, dy .$$

Il est facile de voir que:

$$(2.26) \quad \int_{\Omega} [h, h] \Phi \, dx \, dy \leq \max_{\bar{\Omega}} |\Phi| \|h\|_{W^{0,2}}^2 .$$

Puisque:

$$(1 - \sigma) \|h\|_{W^{0,2}}^2 \leq \|h\|_V^2 ,$$

(cf. [4], p. 287), il découle immédiatement de (2.22), (2.25) et (2.26) que:

$$(2.27) \quad (Lh, h)_V + (C_2(h, h), f)_W \leq \frac{1}{2} \|h\|_V^2 .$$

Les inégalités (1.4) et (2.27) reportées dans (2.7) donnent:

$$\|h\|_V^2 - \|C_2\| \|h\|_V^2 \|g\|_W + \|g\|_W^2 \leq 0 ,$$

<sup>1)</sup> Par  $W^{2,2}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ , on a:  $\Phi \in C(\bar{\Omega})$ .  $\sigma$  est le coefficient de Poisson.

et on déduit que:

$$\|h\|_V \geq 2\|C_2\|^{-1} \quad \text{et} \quad \|g\|_W \geq \|C_2\|^{-1}.$$

Grâce à (2.1), (2.2), (2.8) et (2.14), on conclut (2.23) et (2.24).

(ii) Soient  $|w, \Phi|$  et  $|\bar{w}, \bar{\Phi}|$  deux solutions variationnelles du problème satisfaisant à (2.22). On a (2.27) et:

$$(2.28) \quad (Lh, h)_V + (C_2(h, h), \bar{f})_W \leq \frac{1}{2}\|h\|_V^2.$$

Les relations (2.16), (2.27) et (2.28) reportées dans (2.7) donnent:

$$2\|h\|_V^2 + \|g\|_W^2 \leq \|h\|_V^2.$$

On conclut que:

$$h = 0 \quad \text{dans } V, \quad g = 0 \quad \text{dans } W,$$

et donc:

$$w = \bar{w} \quad \text{dans } V, \quad \Phi = \bar{\Phi} \quad \text{dans } W^{2,2}(\Omega),$$

par (2.1), (2.2), (2.8) et (2.14).

### 3. INTRODUCTION D'UN PARAMETRE

Nous nous intéresserons aux équations:

$$(3.1) \quad w = Lw + C_1(f, w) + \lambda q^* \quad \text{dans } V,$$

$$(3.2) \quad f = -C_2(w, w) \quad \text{dans } W,$$

où:

$$\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$$

est un paramètre. On désigne:

$$(3.3) \quad H = V \times W.$$

L'espace  $H$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(3.4) \quad (|u_1, v_1|, |u_2, v_2|)_H = (u_1, u_2)_V + (v_1, v_2)_W,$$

et la norme:

$$(3.5) \quad \| |u, v| \|_H = \{ \|u\|_V^2 + \|v\|_W^2 \}^{1/2},$$

pour tous  $u, u_1, u_2 \in V$  et  $v, v_1, v_2 \in W$ . Il est clair que les équations (3.1) et (3.2) sont équivalentes à l'équation:

$$(3.6) \quad P_\lambda |w, f| = |0, 0| \quad \text{dans } H,$$

où l'opérateur  $P_\lambda: H \rightarrow H$  est défini par:

$$(3.7) \quad P_\lambda/w, f/ = /2w - 2Lw - 2C_1(f, w) - 2\lambda q^*, f + C_2(w, w)/,$$

pour tout couple  $/w, f/ \in H$ . Par définition de la différentielle de Fréchet, on a:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} P'_\lambda(/w, f/; /h, g/) &= \\ &= /2h - 2Lh - 2C_1(f, h) - 2C_1(g, w), g + 2C_2(w, h)/, \end{aligned}$$

$$(3.9) \quad P''_\lambda(/w, f/; /h, g/, /h, g/) = /-2C_1(g, h) - 2C_1(g, h), 2C_2(h, h)/,$$

grâce à la linéarité de  $L$ , la bilinéarité de  $C_1$  et  $C_2$ , pour tous  $/w, f/, /h, g/$  et  $/h, g/ \in H$ . Par (4.1) dans [1], (3.4), (1.4) et l'inégalité de Hölder, on a:

$$\begin{aligned} (P''_\lambda(/w, f/; /h, g/, /h, g/), /u, v/)_H &= \\ &= -2(C_2(h, u), g)_w - 2(C_2(h, u), g)_w + 2(C_2(h, h), v)_w \leq \\ &\leq 2\|C_2\| \{ \|h\|_V \|u\|_V \|\bar{g}\|_W + \|\bar{h}\|_V \|u\|_V \|g\|_W + \|h\|_V \|\bar{h}\|_V \|v\|_W \} \leq \\ &\leq 3\|C_2\| \|/h, g/\|_H \|/h, g/\|_H \|/u, v/\|_H, \end{aligned}$$

pour tous  $/w, f/, /h, g/, /h, g/$  et  $/u, v/ \in H$ . On déduit de cette inégalité que:

$$\|P''_\lambda(/w, f/; /h, g/, /h, g/)\|_H \leq 3\|C_2\| \|/h, g/\|_H \|/h, g/\|_H,$$

et donc:

$$(3.10) \quad \|P''_\lambda/w, f/\| \leq 3\|C_2\|,$$

pour tout couple  $/w, f/ \in H$ .

#### 4. PROLONGEMENT CONTINU DE LA SOLUTION

Dans la suite, on désigne:

$$/w(\lambda), f(\lambda)/ \in H$$

une solution de l'équation (3.6) pour  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ . Il est clair que  $/w(0), f(0)/ = /0, 0/$  et  $/w(1), f(1)/$  est une solution variationnelle excessive du problème. En utilisant la méthode de Newton-Kantorovitch (cf. [2]) sur l'équation d'opérateur (3.6), on obtient:

$$(4.1) \quad /w^{n+1}, f^{n+1}/ = /w^n, f^n/ - [P'_\lambda/w^0, f^0/]^{-1} P_\lambda/w^n, f^n/,$$

pour  $n = 0, 1, 2, \dots$

Soit  $/w(\lambda_i), f(\lambda_i)/ \in H$  une solution connue pour  $i \in N$ . Nous allons construire une solution de l'équation (3.6) pour  $\lambda = \lambda_{i+1}, \lambda_{i+1} > \lambda_i$ . On pose:

$$\Delta\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i.$$

**Théorème 3. Soit:**

$$(4.2) \quad |w^0, f^0| = |w(\lambda_i), f(\lambda_i)| \quad \text{dans } H,$$

et:

$$(4.3) \quad \Delta\lambda < \{12\|C_2\| \|q^*\|_V\}^{-1}.$$

Supposons que l'inégalité (2.9)<sup>1)</sup> ou (2.22) soit vraie pour  $\lambda = \lambda_i$ . Alors, une suite  $\{|w^n, f^n|\} \subset H$  définie par (4.1) converge vers  $|w(\lambda_{i+1}), f(\lambda_{i+1})| \in H$ .

Démonstration. D'après (4.1) dans [1], (3.4) et (3.8), on a:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} & (P'_\lambda(|w^0, f^0|; |h, g|), |h, g|)_H = \\ & = 2\|h\|_V^2 - 2(Lh, h)_V - 2(C_2(h, h), f(\lambda_i))_W + \|g\|_W^2, \end{aligned}$$

pour  $\lambda = \lambda_{i+1}$  et tout  $|h, g| \in H$ . Il découle de (2.9) ou (2.22) que:

$$(4.5) \quad (Lh, h)_V + (C_2(h, h), f(\lambda_i))_W \leq 0.$$

(cf. (2.12)) ou:

$$(4.6) \quad 2(Lh, h)_V + 2(C_2(h, h), f(\lambda_i))_W \leq \|h\|_V^2,$$

(cf. (2.27)), respectivement. L'inégalité (4.5) ou (4.6) reportée dans (4.4) donne:

$$(P'_\lambda(|w^0, f^0|; |h, g|), |h, g|)_H \geq \|h\|_V^2 + \|g\|_W^2,$$

et donc:

$$(4.7) \quad \|P'_\lambda(|w^0, f^0|; |h, g|)\|_H \geq \| |h, g| \|_H,$$

par (3.5) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour  $\lambda = \lambda_{i+1}$  et tout  $|h, g| \in H$ . On déduit de (4.7) que:

$$(4.8) \quad \|[P'_\lambda |w^0, f^0|]^{-1}\| \leq 1,$$

pour  $\lambda = \lambda_{i+1}$ . Puisque  $|w(\lambda_i), f(\lambda_i)| \in H$  est une solution de l'équation (3.6):

$$P_\lambda |w^0, f^0| = P_\lambda |w(\lambda_i), f(\lambda_i)| = |0, 0| \quad \text{dans } H,$$

pour  $\lambda = \lambda_i$  et donc:

$$P_\lambda |w^0, f^0| = |-2\Delta\lambda q^*, 0| \quad \text{dans } H,$$

pour  $\lambda = \lambda_{i+1}$ , grâce à (3.7). Par (3.5), on a:

$$(4.9) \quad \|P_\lambda |w^0, f^0|\|_H = 2\Delta\lambda \|q^*\|_V,$$

pour  $\lambda = \lambda_{i+1}$ . Une suite de Newton-Kantorovitch définie par (4.1) converge si (cf. [2]):

$$(4.10) \quad \|[P'_\lambda |w^0, f^0|]^{-1}\|^2 \|P_\lambda |w^0, f^0|\|_H \|P''_\lambda |w, f|\| < \frac{1}{2},$$

pour  $\lambda = \lambda_{i+1}$ . Par (3.10), (4.3), (4.8) et (4.9), on a (4.10).

<sup>1)</sup> Pour la condition suffisante, cf. la Remarque 1.



Remarque 2. On pose:

$$\lambda_1 = 0$$

Soit l'inégalité (2.9) ou (2.22) est satisfaite pour  $|w(0), f(0)| = |0, 0|$ . Si nous marchons par  $\Delta\lambda$ , nous allons prolonger continuellement de  $|w(\lambda_1), f(\lambda_1)|$  dans  $|w(\lambda_N), f(\lambda_N)| = |w(1), f(1)|$  qui est une solution variationnelle excessive du problème (1.1)–(1.7) dans [1].

Remarque 3. Dans la pratique, la formule (4.1) n'est pas utilisable, parce que l'opérateur  $P$  est abstrait. Mais, la formule (4.1) est équivalente à:

$$P'_\lambda(|w^0, f^0|; |w^{n+1}, f^{n+1}|) = P'_\lambda(|w^0, f^0|; |w^n, f^n|) - P_\lambda|w^n, f^n|$$

et grâce à (3.7), (3.8), on obtient:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} w^{n+1} - Lw^{n+1} - C_1(f^0, w^{n+1}) - C_1(f^{n+1}, w^0) = \\ = -C_1(f^0, w^n) - C_1(f^n, w^0) + C_1(f^n, w^n) + \lambda q^* \quad \text{dans } V, \end{aligned}$$

$$(4.12) \quad f^{n+1} + 2C_2(w^0, w^{n+1}) = 2C_2(w^0, w^n) - C_2(w^n, w^n) \quad \text{dans } W.$$

En faisant le produit scalaire par tout  $h \in V$  dans (4.11) et par tout  $g \in W$  dans (4.12), on obtient:

$$\begin{aligned} (w^{n+1}, h)_V - B(F; w^{n+1}, h) - B(f^0; w^{n+1}, h) - B(f^{n+1}; w^0, h) = \\ = -B(f^0; w^n, h) - B(f^n; w^0, h) + B(f^n; w^n, h) + \lambda \int_{\Omega} qh \, dx \, dy + \lambda p(h), \end{aligned}$$

pour tout  $h \in V$ , et:

$$(f^{n+1}, g)_W + 2B(w^{n+1}; w, g) = 2B(w^n; w^0, g) - B(w^n; w^n, g),$$

pour tout  $g \in W$ , grâce à (3.13)–(3.16) dans [1] et par notation dans [1].

## 5. ESTIMATION PAR EXCES DE $\|C_2\|$

Soient  $w$  et  $\bar{w}$  des éléments de  $V$  et  $g$  un élément de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . En appliquant la formule de Green et par (3.15) dans [1], on obtient:

$$(5.1) \quad (C_2(w, \bar{w}), g)_W = B(w; \bar{w}, g) = \int_{\Omega} [w, \bar{w}] g \, dx \, dy.$$

Par (4.12) dans [1] et l'inégalité de Hölder, on a:

$$(5.2) \quad \left| \int_{\Omega} [w, \bar{w}] g \, dx \, dy \right| \leq \max_{\Omega} |g| \int_{\Omega} |[w, \bar{w}]| \, dx \, dy \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{\bar{\Omega}} |g| \int_{\Omega} \{ |w_{xx}| |\bar{w}_{yy}| + \sqrt{(2)} |w_{xy}| \sqrt{(2)} |\bar{w}_{xy}| + |w_{yy}| |\bar{w}_{xx}| \} dx dy \leq \\ &\leq \max_{\bar{\Omega}} |g| \|w\|_{W_0^{2,2}} \|\bar{w}\|_{W_0^{2,2}} . \end{aligned}$$

Puisque  $\Omega$  est un ouvert borné de  $E_2$ , il existe un rectangle:

$$R = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle ,$$

tel que:

$$\Omega \subset R .$$

On définit une fonction  $\bar{g}$  sur  $R$  par:

$$(5.3) \quad \bar{g}(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } R - \Omega . \end{cases}$$

On a:

$$\bar{g}(a, y) = \bar{g}(x, c) = 0 ,$$

et:

$$\int_a^x \int_c^y \bar{g}_{xy} dx dy = \bar{g}(x, y) ,$$

pour tout  $(x, y) \in R$ . En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$\begin{aligned} |\bar{g}(x, y)| &\leq \int_a^x \int_c^y |\bar{g}_{xy}| dx dy \leq \int_a^b \int_c^d |\bar{g}_{xy}| dx dy \leq \\ &\leq \left\{ \int_a^b \int_c^d (\bar{g}_{xy})^2 dx dy \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b \int_c^d dx dy \right\}^{1/2} , \end{aligned}$$

i.e.:

$$(5.4) \quad |\bar{g}(x, y)| \leq M^{1/2} \left\{ \int_R (\bar{g}_{xy})^2 dx dy \right\}^{1/2} ,$$

pour tout  $(x, y) \in R$ , où:

$$(5.5) \quad M = (b - a)(d - c) .$$

On déduit de (5.3) et (5.4) que:

$$|g(x, y)| \leq M^{1/2} \left\{ \int_{\Omega} (g_{xy})^2 dx dy \right\}^{1/2} ,$$

et donc:

$$(5.6) \quad \max_{\bar{\Omega}} |g| \leq \left( \frac{M}{2} \right)^{1/2} \|g\|_W .$$

Par (5.1), (5.2) et (5.6), on a:

$$(5.7) \quad (C_2(w, \bar{w}), g)_W \leq \left( \frac{M}{2} \right)^{1/2} \|w\|_{W_0^{2,2}} \|\bar{w}\|_{W_0^{2,2}} \|g\|_W .$$

La densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans l'espace  $W_0^{2,2}(\Omega)$ , implique que (5.7) est satisfaite pour tout  $g \in W_0^{2,2}(\Omega)$ . On pose:

$$(5.8) \quad g = C_2(w, \bar{w}).$$

Il découle de (5.7) que:

$$(5.9) \quad \|C_2(w, \bar{w})\|_W \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} \|w\|_{W_0^{2,2}} \|\bar{w}\|_{W_0^{2,2}}.$$

Puisque:

$$(1 - \sigma) \|w\|_{W_0^{2,2}}^2 \leq \|w\|_V^2,$$

(cf. [4]), on déduit de (5.9) que:

$$\|C_2(w, \bar{w})\|_W \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} (1 - \sigma)^{-1} \|w\|_V \|\bar{w}\|_V,$$

pour tous  $w, \bar{w} \in V$ . Par définition, on a:

$$\|C_2\| \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/2} (1 - \sigma)^{-1},$$

avec (5.5).

#### Références

- [1] *J. Cibula*: Equations de von Kármán. I. Résultat d'existence pour les problèmes aux limites non homogènes. *Aplikace matematiky*, 29 (1984), 317–332.
- [2] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов*: Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, Москва 1959.
- [3] *Н. Ф. Морозов*: Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд. Ленинградского университета, Ленинград 1978.
- [4] *K. Rektorys*: Les méthodes en problèmes des ingénieurs et de la physique mathématique. SNTL, Prague 1974 (en tchèque).
- [5] *L. Reinhart*: On the numerical analysis of the von Kármán equations: Mixed finite element approximation and continuation techniques. *Numer. Math.*, 39 (1982), 371–404.

#### Súhrn

### ROVNICE VON KÁRMÁNA II. APROXIMÁCIA RIEŠENIA

JULIUS CIBULA

V článku sú uvedené postačujúce podmienky pre lokálnu a globálnu jednoznačnosť riešenia úlohy. Variačné riešenie úlohy je konštruované Newton-Kantorovičovou metódou a metódou spojitého predĺžovania riešenia pri uvedených postačujúcich podmienkach.

*Adresse d'auteur*: RNDr. Július Cibula, CSc., Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Strojnícka fakulta SVŠT, Gottwaldovo nám. 17, 812 31 Bratislava.