

# Aplikace matematiky

---

Zdeněk Jankovský; Miroslav Šejdl  
Zur äquiformen Geometrie in der Ebene

*Aplikace matematiky*, Vol. 32 (1987), No. 1, 57--62

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104236>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1987

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## ZUR ÄQUIFORMEN GEOMETRIE IN DER EBENE

ZDENĚK JANKOVSKÝ, MIROSLAV ŠEJDL, Praha

(Eingegangen am 8. Oktober 1985)

*Zusammenfassung.* Im Artikel werden die Integral- und Differentialgrundinvarianten (Bogen, Krümmung) der ebenen Kurve angesichts der äquiformen Gruppe ( $\mathcal{E}$ -Gruppe) bei der Anwendung der komplexen Symbolik hergeleitet. Weiter werden die  $\mathcal{E}$ -minimalen Kurven,  $\mathcal{E}$ -Geraden und  $\mathcal{E}$ -Kreise von der  $\mathcal{E}$ -Geometrie festgestellt; im euklidischen Modell handelt es sich um die Geraden, Kreise und logarithmischen Spiralen.

*Keywords:* Integral- und Differentialgrundinvarianten, geometrische Grundobjekte.

*Classification AMS:* 53 A 55.

## 1. EINLEITUNG

Die äquiforme Geometrie in der Ebene wird in der Kinematik des ähnlich-veränderlichen Objektes angewandt (s. z. B. [1]–[3], [6], [8]). In diesem Artikel werden ihre Integral- und Differentialgrundinvarianten ( $\mathcal{E}$ -Bogen und  $\mathcal{E}$ -Krümmung) und geometrische Grundobjekte ( $\mathcal{E}$ -minimale Kurve,  $\mathcal{E}$ -Gerade,  $\mathcal{E}$ -Kreis) bei der komplexen Symbolik (s. [5] und vgl. [7]) als eine Grundlage der äquiformen Kinematik hergeleitet.

Sei  $R$ , bzw.  $K$  der Körper der reellen, bzw. komplexen Zahlen,  $E_2$  die äquiforme Ebene ( $\mathcal{E}$ -Ebene).  $E_2 \neq \emptyset$  ist eine Menge mit diesen Eigenschaften:

- 1)  $\exists \tau, \tau: E_2 \xleftrightarrow{\text{bij}} K: (z) \leftrightarrow z$  (Punkt  $\leftrightarrow$  komplexe Zahl)
- 2)  $\forall \tau_1, \tau_2: \tau_1: E_2 \xleftrightarrow{\text{bij}} K; \tau_2: E_2 \xleftrightarrow{\text{bij}} K, \exists$  eine äquiforme Transformation  $\mathcal{E} = \tau_1 \circ \tau_2^{-1}: K \rightarrow K: \mathcal{E}(\zeta) = z:$

$$(1) \quad z = m + n\zeta,$$

wo  $m, n \in K, n \neq 0; z, \zeta \in K$ .

Diese " $\mathcal{E}$ -Transformation" (1) stellt analytisch die Koordinatentransformation, bzw. angesichts der Abbildung  $\tau$  die Punkttransformation in  $E_2$  dar. Die Menge aller  $\mathcal{E}$ -Transformationen bildet eine äquiforme Gruppe ( $\mathcal{E}$ -Gruppe); die  $\mathcal{E}$ -Gruppe operiert transitiv in  $E_2$  und (1) ist deren analytische Darstellung. Äquiforme Geometrie ( $\mathcal{E}$ -Geometrie) in der  $\mathcal{E}$ -Ebene  $E_2$  ist die Geometrie angesichts der  $\mathcal{E}$ -Gruppe.

§ 2.  $\mathcal{E}$ -Integral- und  $\mathcal{E}$ -Differentialinvariante.

Sei

$$\mathcal{C} \equiv \zeta = \zeta(t), \quad t \in \mathcal{I}$$

eine parametrische Darstellung der Kurve  $\mathcal{C}$  in der  $\mathcal{E}$ -Ebene  $E_2$ . Ihr Bild bei einer beliebigen  $\mathcal{E}$ -Transformation (1) ist eine Kurve mit der Parametrisation

$$(2) \quad \mathcal{E}(\mathcal{C}) \equiv z = z(t) = m + n \zeta(t).$$

Suchen wir zuerst ein  $\mathcal{E}$ -Invariantenableitung:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}(t) &= n \dot{\zeta}(t) \\ \ddot{z}(t) &= n \ddot{\zeta}(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} = \frac{\ddot{\zeta}}{\dot{\zeta}}; \quad \dot{\zeta} \neq 0 (\dot{z} \neq 0) \quad \text{auf } \mathcal{I}.$$

Bezeichnen wir diese  $\mathcal{E}$ -Invariantenableitung mit

$$(3) \quad \frac{\ddot{z}}{\dot{z}} = (z, t)$$

Transformieren wir den Parameter  $t$ :

$$\Theta: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}': \Theta = \Theta(t), \quad \text{wo } \Theta = \bar{\Theta} \in C^2(\mathcal{I}) \quad \text{et} \quad \frac{d\Theta}{dt} = \dot{\Theta} \neq 0$$

auf  $\mathcal{I}'$ , dann gilt

$$(4) \quad (z, t) = \frac{z'' \cdot \dot{\Theta}^2 + z' \cdot \ddot{\Theta}}{z' \cdot \dot{\Theta}} = (z, \Theta) \cdot \dot{\Theta} + (\Theta, t)$$

wo

$$z' = \frac{dz}{d\Theta}; \quad z'' = \frac{d^2z}{d\Theta^2}.$$

Aus der Beziehung (4) folgt: „Die  $\mathcal{E}$ -Invariantenableitung (3) ist nicht  $\Theta$ -invariant“.

Die  $\mathcal{E}$ -Invariantenableitung (3) ist in allgemeinen eine komplexe Funktion einer reellen Veränderlichen; bezeichnen wir diese wie folgt:

$$(5) \quad (z, t) = I(t) = I_1(t) + j I_2(t); \quad j^2 = -1.$$

Aus (4) und (5) folgt

$$(6) \quad I_1(t) = I_1(\Theta) \cdot \dot{\Theta} + (\Theta, t)$$

$$(7) \quad I_2(t) = I_2(\Theta) \cdot \dot{\Theta},$$

wo  $I_1(t) = \text{Re } I(t)$ ,  $I_2(t) = \text{Im } I(t)$  auch  $\mathcal{E}$ -Invarianten sind. Sei

$$I_2(t) \neq 0 \quad \text{auf } \mathcal{I} (\Leftrightarrow I_2(\Theta) \neq 0 \text{ auf } \mathcal{I}').$$

Transformieren wir  $t \rightarrow \Theta$  so, daß

$$(8) \quad I_2(\Theta) = \varepsilon = \text{sign } I_2(t)$$

gilt. Aus (7) und (8) bekommen wir für diese  $\Theta$ -Transformation:

$$(9) \quad \Theta(t) = \int \varepsilon I_2(t) dt; \quad t \in \mathcal{I}.$$

**Satz 1.** (9) ist eine  $\mathcal{E}$ -Integralinvariante.

**Beweis.** Die  $\mathcal{E}$ -Invarianz (9) folgt aus der  $\mathcal{E}$ -Invarianz  $I_2$ .  $\Theta$ -Invarianz: übergehen wir zum Parameter  $\tau$ :  $\tau = \tau(t)$ . Wir bekommen aus (7):

$$I_2(\Theta) \cdot \dot{\Theta} = I_2(\tau) \cdot \dot{\tau}$$

und daraus folgt

$$\Theta(\tau) = \int \varepsilon I_2(\tau) d\tau,$$

also die  $\Theta$ -Invarianz (9).

**Definition 1.** Den Parameter  $\Theta$ , der durch die  $(\mathcal{E}, \Theta)$ -invariante Gleichung (9) festgelegt wird, nennen wir (analogisch zu den Geometrien auf anderen Gruppen) den  $\mathcal{E}$ -Bogen der Kurve  $\mathcal{C}$ .

$\mathcal{E}$ -Bogen ist eine Grundintegralinvariante der Kurve  $\mathcal{C}$ . Parametrisieren wir  $\mathcal{C}$  durch  $\Theta$ :

$$\mathcal{C} \equiv z = z(\Theta); \quad \Theta \in \mathcal{I};$$

dann bekommen wir für die  $\mathcal{E}$ -invariante Ableitung der Kurve  $\mathcal{C}$ :

$$(10) \quad (z, \Theta) = I(\Theta) = I_1(\Theta) + j\varepsilon.$$

Aus (4), (9) und (10) folgt

$$I_1(t) + j I_2(t) = [I_1(\Theta) + j\varepsilon] \varepsilon I_2(t) + (\Theta, t),$$

daraus folgt

$$(11) \quad I_1(\Theta) = \frac{I_1(t) - (\Theta, t)}{\varepsilon I_2(t)}.$$

Aus (9) folgt

$$\dot{\Theta} = \varepsilon I_2(t); \quad \ddot{\Theta} = \varepsilon \dot{I}_2(t)$$

und weiter

$$(12) \quad (\Theta, t) = \frac{\ddot{\Theta}}{\dot{\Theta}} = \frac{\dot{I}_2(t)}{I_2(t)}$$

ist. Aus (11) und (12) folgt.

$$(13) \quad I_1(\Theta) = \frac{I_1(t) \cdot I_2(t) - \dot{I}_2(t)}{\varepsilon I_2^2(t)} = \Omega.$$

**Satz 2.**  $\Omega$  ist eine Grunddifferentialinvariante der Kurve  $\mathcal{C}$ . Der Rang dieser Invariante ist 3.

Beweis: Die  $\mathcal{E}$ -Invarianz folgt aus der  $\mathcal{E}$ -Invarianz von  $I_1, I_2$ ;  $\Theta$ -Invarianz: gehen wir zum Parameter  $\sigma = \sigma(t)$  über; aus (6) und (7) bekommen wir:

$$I_1(t) = I_1(\sigma) \cdot \dot{\sigma} + \frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}}$$

$$I_2(t) = I_2(\sigma) \cdot \dot{\sigma}$$

und ferner ist

$$I_2(t) = I_2'(\sigma) \cdot \dot{\sigma}^2 + I_2(\sigma) \cdot \ddot{\sigma}$$

und aus (13) ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_2(\Theta) &= \frac{\left( I_1(\sigma) \dot{\sigma} + \frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}} \right) (I_2(\sigma) \cdot \dot{\sigma}) - I_2'(\sigma) \cdot \dot{\sigma}^2 - I_2(\sigma) \cdot \ddot{\sigma}}{\varepsilon I_2^2(\sigma) \cdot \dot{\sigma}^2} = \\ &= \frac{I_1(\sigma) \cdot I_2(\sigma) - I_2'(\sigma)}{\varepsilon I_2^2(\sigma)}, \end{aligned}$$

also die  $\Theta$ -Invarianz  $\Omega$ . (13) kann man in der Form

$$(13') \quad \Omega = I_1(\Theta) = (z, \Theta) - j\varepsilon = \frac{z'' - jz'\varepsilon}{z'}$$

darstellen, wo  $z' = dz/d\Theta, \dots$  ist.

**Definition 2.** Die Differentialinvariante  $\Omega$  nennen wir die  $\mathcal{E}$ -Krümmung der Kurve  $\mathcal{C}$ .

### 3. $\mathcal{E}$ -MINIMALE KURVEN, $\mathcal{E}$ -GERADEN, $\mathcal{E}$ -KREISE

**Definition 3.** Ein Punkt  $(z_0) = (z(t_0))$  der Kurve  $\mathcal{C} \equiv z = z(t), t_0 \in \mathcal{I}$  heißt

- a) ihr minimaler Punkt  $\Leftrightarrow \dot{\Theta}(t_0) = 0$ ,
- b) ihr inflexer Punkt  $\Leftrightarrow \Omega(\Theta_0) = 0 \wedge \dot{\Theta}(t_0) \neq 0$
- c) ihr kreisförmiger Punkt  $\Leftrightarrow \Omega'(\Theta_0) = 0 \wedge \Omega(\Theta_0) \neq 0 \wedge \dot{\Theta}(t_0) \neq 0$ .

**Definition 4.** Die Kurve  $\mathcal{C} \equiv z = z(t), t \in \mathcal{I}$ , nennen wir

- a)  $\mathcal{E}$ -minimale Kurve  $\Leftrightarrow$  alle ihre Punkte sind ihre minimale Punkte
- b)  $\mathcal{E}$ -Gerade  $\Leftrightarrow$  alle ihre Punkte sind ihre inflexe Punkte
- c)  $\mathcal{E}$ -Kreis  $\Leftrightarrow$  alle ihre Punkte sind ihre kreisförmige Punkte.

ad a) Suchen wir eine parametrische Darstellung von  $\mathcal{E}$ -minimalen Kurven.

Für die  $\mathcal{E}$ -minimalen Kurven gilt:  $\dot{\Theta}(t) = 0$  auf  $\mathcal{I} \Leftrightarrow I_2(t) = 0$  auf  $\mathcal{I} \Leftrightarrow \text{Im}(\ddot{z}/\dot{z}) = 0$  auf  $\mathcal{I}$  ( $\ddot{z}_2/\dot{z}_2 = (\ddot{z}_1/\dot{z}_1)$  (bei der Bezeichnung  $z = z_1 + jz_2, j^2 = -1$ ). Daraus folgt

$$z_2 = c_1 z_1 + e_2, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{konst.},$$

und wir bekommen

$$(14) \quad z = z(t) = \alpha z_1(t) + \beta; \quad z_1 = \bar{z}_1,$$

wo  $\alpha, \beta \in K$ , konst.,  $\alpha = 1 + j c_1$ ,  $\beta = j c_2$  ist. Daraus folgt:

**Satz 3.**  *$\mathcal{E}$ -minimale Kurven sind Kurven mit der parametrischen Darstellung (14), d. h. im euklidischen Modell die Geraden.*

ad b) Suchen wir eine parametrische Darstellung der  $\mathcal{E}$ -Geraden, für die  $\mathcal{E}$ -Geraden gilt:

$$\Omega = 0 \Leftrightarrow z'' = j\epsilon z'. \quad \text{Legen wir } z' = \mathfrak{z}, z'' = \mathfrak{z}' ;$$

wir bekommen

$$(15) \quad \mathfrak{z}' = j\epsilon \mathfrak{z}$$

Die Lösung von (15) ist

$$\mathfrak{z} = c_1 \exp(j\epsilon \Theta)$$

und

$$(16) \quad z(\Theta) = c \exp(j\epsilon(\Theta - \Theta_0)) + D; \quad c \in \mathbb{R}; \quad D \in K, \text{ konst.}$$

Daraus folgt:

**Satz 4.**  *$\mathcal{E}$ -Geraden sind Kurven mit der parametrischen Darstellung (16), d. h. im euklidischen Modell die Kreise (vgl. [6]).*

ad c) Suchen wir eine parametrische Darstellung der  $\mathcal{E}$ -Kreise. Für  $\mathcal{E}$ -Kreise gilt:

$$\Omega' = 0 \Leftrightarrow \Omega = \Omega_0(\text{konst.}) \Leftrightarrow z'' = (\Omega_0 + j\epsilon) z'.$$

Lösen wir diese Gleichung; dann bekommen wir:

$$(17) \quad z = A \exp(B\Theta) + C,$$

wo  $A, B, C \in K(\text{konst.})$  sind. Daraus folgt:

**Satz 5.**  *$\mathcal{E}$ -Kreise sind Kurven mit der parametrischen Darstellung (17), d. h. im euklidischen Modell die logarithmischen Spiralen mit dem asymptotischen Punkt im Punkte (C); (vgl. [6]).*

#### Literatur

- [1] *L. Burmester:* Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegungen der affinveränderlichen, der ähnlich veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme. Zeitschrift für Math. und Physik, 23 (1878), 103–131.
- [2] *M. Krause:* Zur Theorie der ebenen ähnlich veränderlichen Systeme. Jahresbericht der deutschen Mathematik-Vereinigung, 19 (1910), 327–329.

- [3] R. Müller: Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seiner Ebene. Jahresbericht der deutschen Mathematik-Vereinigung, 19 (1910), 29—89.
- [4] G. Kowalewski: Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und Liesche Transformationsgruppen. Berlin 1931.
- [5] Z. Pirko: Einführung in die kinematische Geometrie in der Ebene (Tschechisch). Praha SNTL 1968.
- [6] K. Drábek, J. Chudý: Beitrag zur  $\mathcal{E}$ -Kinematik in der Ebene: Gruppentheoretische Grundlagen der  $\mathcal{E}$ -Bewegung. Acta polytechnica — Práce ČVUT Praha, 3 (IV-2), 1978, 77—92.
- [7] Z. Jankovský: Zu einigen Fragen der kinematischen Geometrie auf der  $\mathcal{M}$ -Gruppe (Tschechisch). Acta polytechnica — Práce ČVUT Praha, 7 (IV-3), 1978, 43—51.
- [8] M. Šejdl: Grundeigenschaften der 1- und 2-parametrischen äquiformen Bewegungen (Tschechisch). Referat zur kandidatischen Fachprüfung, Praha 1985.

Souhrn

### K EKVIFORMNÍ GEOMETRII V ROVINĚ

ZDENĚK JANKOVSKÝ, MIROSLAV ŠEJDL

V článku jsou při užití komplexní symboliky odvozeny základní integrální a diferenciální invarianty (oblouk a křivost) rovinné křivky vzhledem k ekviformní grupě ( $\mathcal{E}$ -grupě). Dále jsou určeny  $\mathcal{E}$ -minimální křivky,  $\mathcal{E}$ -přímky a  $\mathcal{E}$ -kružnice rovinné  $\mathcal{E}$ -geometrie; v euklidovském modelu jsou to po řadě přímky, kružnice a logaritmické spirály.

Резюме

### К ЭКВИФОРМНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

ZDENĚK JANKOVSKÝ, MIROSLAV ŠEJDL

В статье с помощью комплексной символики определяются основные интегральные и дифференциальные инварианты (дуга, кривизна) кривой в эквиформной плоскости. Дальше определены  $\mathcal{E}$ -минимальная кривая,  $\mathcal{E}$ -прямая и  $\mathcal{E}$ -окружность  $\mathcal{E}$ -геометрии, которым в евклидовой модели соответствуют прямая, окружность и логарифмическая спираль.

Anschrift der Verfasser: Doc. RNDr. Zdeněk Jankovský, CSc., katedra matematiky, fakulta elektrotechnická ČVUT, Suchbátarova 2, 166 27 Praha 6; RNDr. Miroslav Šejdl, katedra matematiky a deskriptivní geometrie, fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.