Jürgen Herzberger

Ein effizienter Algorithmus zur iterativen Einschliessung der inversen Matrix

Aplikace matematiky, Vol. 32 (1987), No. 4, 271--275

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104258`

32 (1987) APLIKACE MATEMATIKY No. 4, 271—275

EIN EFFIZIENTER ALGORITHMUS ZUR ITERATIVEN EINSCHLIESSUNG DER INVERSEN MATRIX

Jürgen HERZBERGER

(Eingegangen am 5. November 1985)

Zusammenfassung. Es wird ein kombinierter Algorithmus zur iterativen Einschließung der Inversen einer Matrix beschrieben. Es handelt sich dabei um eine intervallmäßige Version des Schulz'schen Verfahrens. Es wird bewiesen, daß der Algorithmus genauso effizient ist wie ein hisher bekannter aus [2], daß er aber in Bezug auf den akkumulierten Rundungsfehler dem bisherigen Vorgehen vorzuziehen ist. Ein numerisches Beispiel wird gegeben.

Wir betrachten eine nichtsinguläre $m \times m$-Matrix $\underset{\cdot}{\mathbf{A}}$ und dazu eine $m \times m$-Intervallmatrix $\mathbf{X}^{(0)}$, welche $\underset{\cdot}{\mathbf{A}}^{-1}$ einschließt, d. h. es gelte

$$\underset{\cdot}{\mathbf{A}}^{-1} \in \mathbf{X}^{(0)} .$$

In [2] werden in Chapter 18 intervallmäßige Schulz-Verfahren betrachtet, welche die ursprüngliche Einschließung $\mathbf{X}^{(0)}$ iterativ verbessern. Als optimal in Bezug auf die rechnerische Effizienz erweist sich dort ein kubisches Verfahren. Wir betrachten nun ausgehend von dem quadratisch konvergenten Verfahren dieses Typs folgende Modifikation:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^{(k+1)} &= m(\mathbf{X}^{(k)}) + \mathbf{X}^{(k)}(\underset{\cdot}{\mathbf{I}} - \underset{\cdot}{\mathbf{A}}m(\mathbf{X}^{(k)})) ,\\ \mathbf{X}^{(k+1)} &= m(\mathbf{X}^{(k)}) + \mathbf{Y}^{(k+1)}(\underset{\cdot}{\mathbf{I}} - \underset{\cdot}{\mathbf{A}}m(\mathbf{X}^{(k)})) , \quad k \geqq 0 ,\end{aligned} \tag{1}$$

dabei bedeutet $m(\mathbf{X}) = m((X_{ij})) = ((x_{ij}^1 + x_{ij}^2)/2)$ die Mittelpunktmatrix der Intervallmatrix $\mathbf{X}$ (siehe [2]).

Wir beweisen nun für die Folge der Iterierten $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ folgenden Satz:

Satz 1. *Unter der Voraussetzung* $\underset{\cdot}{\mathbf{A}}^{-1} \in \mathbf{X}^{(0)}$ *gelten für die Iterierten nach Vorschrift* (1) *folgende Aussagen*:

$$\underset{\cdot}{\mathbf{A}}^{-1} \in \mathbf{X}^{(k)} , \quad \underset{\cdot}{\mathbf{A}}^{-1} \in \mathbf{Y}^{(k)} , \quad k \geqq 0 , \tag{2a}$$

$$\varrho(\underset{\cdot}{\mathbf{I}} - \underset{\cdot}{\mathbf{A}}m(\mathbf{X}^{(0)})) < 1 \Leftrightarrow \lim_{k \to > \infty} \mathbf{X}^{(k)} = \lim_{k \to \infty} \mathbf{Y}^{(k)} = \underset{\cdot}{\mathbf{A}}^{-1} , \tag{2b}$$

(2c) *für die R-Ordnung des Verfahrens (siehe Appendix* A *in* [2]) *gelten die Abschätzungen*

$$O_R(\{\mathbf{X}^{(k)}\}, \mathbf{A}^{-1}) \geqq 3 \quad \text{und} \quad O_R(\{\mathbf{Y}^{(k)}\}, \ \mathbf{A}^{-1}) \geqq 3 \,.$$

Beweis. Zu (2a): Wegen

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{X})$$

folgt bei vollständiger Induktion, falls $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbf{X}^{(k)}$ gilt, mit $\mathbf{X} = m(\mathbf{X}^{(k)})$ und der Einschließungseigenschaft der Intervalloperationen schließlich (2a).

Zu (2b): Die Iterationsvorschrift (1) kann in Bezug auf die Iterationsfolge $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ geschrieben werden als

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = m(\mathbf{X}^{(k)}) + (m(\mathbf{X}^{(k)}) + \mathbf{X}^{(k)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(k)})))\,(\mathbf{I} - m(\mathbf{X}^{(k)}))\,, \tag{3}$$

was dem Verfahren (5') in [2] S. 210 entspricht. Für dieses gilt aber

$$\varrho(\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(0)})) < 1 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{A}^{-1}\,.$$

Aus der zweiten Zeile von (1) folgt durch Anwendung des Durchmesseroperators d aber die Abschätzung

$$d(\mathbf{Y}^{(k+1)}) = d(\mathbf{X}^{(k)})\,|\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(k)})|$$

was folgende Schlußkette ermöglicht:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} d(\mathbf{X}^{(k)}) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} |\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(k)})| = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} d(\mathbf{Y}^{(k)}) = \mathbf{0}\,,$$

woraus dann mit (2a) schließlich $\lim_{k\to\infty} \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{A}^{-1}$ gefolgert werden kann.

Die Umkehrung dieses Schlußes ist dann trivial.

Zu (2c): Durch Anwendung des Durchmesseroperators d auf Vorschrift (1) folgen die Beziehungen

$$d(\mathbf{Y}^{(k+1)}) = d(\mathbf{X}^{(k)})\,|\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(k)})| \leqq d(\mathbf{X}^{(k)})\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}^{-1} - m(\mathbf{X}^{(k)})| \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{2}\, d(\mathbf{X}^{(k)})\,|\mathbf{A}|\, d(\mathbf{X}^{(k)})\,,$$

$$d(\mathbf{X}^{(k+1)}) = d(\mathbf{Y}^{(k+1)})\,|\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(k)})| \leqq d(\mathbf{Y}^{(k+1)})\,|\mathbf{A}|\,|\mathbf{A}^{-1} - m(\mathbf{X}^{(k)})| \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{2}\, d(\mathbf{Y}^{(k+1)})\,|\mathbf{A}|\, d(\mathbf{X}^{(k)})\,.$$

Durch Anwendung von zunächst einer monotonen, multiplikativen Matrixnorm auf diese Ungleichungen und dann durch Anwendung des Normäquivalentsatzes folgen die Rekursionen

$$\|d(\mathbf{Y}^{(k+1)})\| \leqq \alpha \|d(\mathbf{X}^{(k)})\|^2\,,$$

$$\|d(\mathbf{X}^{(k+1)})\| \leqq \beta \|d(\mathbf{Y}^{(k+1)})\| \,.\, \|d(\mathbf{X}^{(k)})\|\,.$$

Dies ist aber eine Rekursion, wie sie in [5] behandelt wurde und für deren Konvergenzordnung dann folgt:

$$O_R(\{d(\mathbf{X}^{(k)})\}, \mathbf{0}) \geqq 3 \quad \text{und} \quad O_R(\{d(\mathbf{Y}^{(k)})\}, \mathbf{0}) \geqq 3\,,$$

was gleichbedeutend mit (2c) ist. ■

Zum Verfahren (1) läßt sich nun analog in [2] ein entsprechendes monotones Iterationsverfahren bilden. Dieses wird beschrieben durch

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathbf{Y}^{(k+1)} &= \{m(\mathbf{X}^{(k)}) + \mathbf{X}^{(k)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(k)}))\} \cap \mathbf{X}^{(k)}\,, \\ \mathbf{X}^{(k+1)} &= \{m(\mathbf{X}^{(k)}) + \mathbf{Y}^{(k+1)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(k)}))\} \cap \mathbf{Y}^{(k+1)}\,, \quad k \geqq 0\,. \end{aligned}$$

Hierfür gilt offensichtlich dir Monotonieaussage

$$\mathbf{Y}^{(k+1)} \subseteq \mathbf{X}^{(k)} \subseteq \mathbf{Y}^{(k)} \subseteq \mathbf{X}^{(k-1)} \subseteq \ldots$$

Für das Verfahren (4) läßt sich der folgende Satz beweisen, wobei man beachte, daß dieses Verfahren nicht identisch ist mit dem Verfahren in [4] und für die Folge $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ nicht mit dem Verfahren

$$(5) \quad \mathbf{X}^{(k+1)} = \{m(\mathbf{X}^{(k)}) + (m(\mathbf{X}^{(k)}) + \mathbf{X}^{(k)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(k)})))(\mathbf{I} - \mathbf{A}m(\mathbf{X}^{(k)}))\} \cap \mathbf{X}^{(k)}\,.$$

Satz 2. *Unter der Voraussetzung $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbf{X}^{(0)}$ gelten für die Iterierten nach Vorschrift (4) folgende Aussagen:*

(2a) $$\mathbf{A}^{-1} \in \mathbf{X}^{(k)}\,, \quad \mathbf{A}^{-1} \in \mathbf{Y}^{(k)}\,, \quad k \geqq 0\,,$$

(6) $$\varrho(|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{X}|) < 1 \quad \textit{für alle} \quad \mathbf{X} \in \mathbf{X}^{(0)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{X}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{A}^{-1}\,,$$

(2c) *für die R-Ordung des Verfahrens gelten die Abschätzungen*

$$O_R(\{\mathbf{X}^{(k)}\}, \mathbf{A}^{-1}) \geqq 3 \quad \text{und} \quad O_R(\{\mathbf{Y}^{(k)}\}, \mathbf{A}^{-1}) \geqq 3\,.$$

Beweis. Die Beweise von (2a) und (2c) erfolgen völlig analog zu den entsprechenden Aussagen in Satz 1.

Zu (6): Wegen der Monotonie der Folgen $\{\mathbf{X}^{(k)}\}$ und $\{\mathbf{Y}^{(k)}\}$ folgt deren Konvergenz mit $\lim_{k\to\infty} \mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}$ und $\lim_{k\to\infty} \mathbf{Y}^{(k)} = \mathbf{Y}$. Aufgrund der erwähnten Beziehung

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \subseteq \mathbf{Y}^{(k+1)} \subseteq \mathbf{X}^{(k)}$$

muß gelten:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}\,.$$

Damit sind die beiden Teilschritte von (4) im Limes genau eine Rechenvorschrift. Mit Hilfe dieser läßt sich dann wie in [2] S. 208

$$d(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

schließen, was aber wegen (2a) gleichbedeutend ist mit der obigen Aussage. ■

Verfahren (1) hat den Voteil, daß das Konvergenzkriterium weniger streng ist als bei Verfahren (4). Dagegen hat Verfahren (4) den Vorteil, daß es monotone Iterationsfolgen liefert, was ein sauberes Abbruchkriterium ermöglicht. Bei gegebenen $\boldsymbol{X}^{(0)}$ wird man also ein Verfahren (7) anwenden, das zunächst gemäß Vorschrift (1) startet und dann bei Erfülltsein eines hinreichenden Kriteriums für die Konvergenz von (4) mit der Vorschrift (4) fortfährt, bis die Iteration abgebrochen wird. Hierzu vergleiche man auch die ausführliche Beschreibung eines solchen Vorgehens bei den bisherigen Verfahren in [3].

Auf diese Weise lassen sich sowohl aus (3) und (5), als auch aus (1) und (4) derart kombinierte Verfahren bilden. Bei beiden Vorgehensweisen gelten die gleichen Eigenschaften bezüglich Konvergenz und bezüglich der Konvergenzordnung. Wie man durch Abzählen der Rechenoperationen pro Schritt sieht, haben beide Methoden auch die gleiche Effizienz. Dennoch erweist sich Verfahren (1) und (4) als vorteilhafter, da die Rechenvorschrift wesentlich einfacher aufgebaut ist und dadurch der akkumulierte Rundungsfehler geringer ist.

Wir wollen abschließend ein numerisches Beispiel für ein aus (1) und (4) kombiniertes Verfahren bringen. Die Rechnungen dazu wurden in PASCAL SC (siehe [7]) auf einem Personalcomputer Apple//e durchgeführt (siehe [6]).

Beispiel.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1{\cdot}0\mathrm{E}+00 & -1{\cdot}0\mathrm{E}-01 & 1{\cdot}0\mathrm{E}-01 \\ -1{\cdot}0\mathrm{E}-01 & 1{\cdot}0\mathrm{E}+00 & 1{\cdot}0\mathrm{E}-01 \\ 1{\cdot}0\mathrm{E}-01 & 1{\cdot}0\mathrm{E}-01 & 1{\cdot}0\mathrm{E}+00 \end{pmatrix}$$

$$X_{1,1}^{(0)} = [-2{\cdot}0\mathrm{E}-01,\ 2{\cdot}2\mathrm{E}+00]\,,\quad X_{2,1}^{(0)} = [-2{\cdot}0\mathrm{E}-01,\ 2{\cdot}0\mathrm{E}-01]$$
$$X_{1,2}^{(0)} = [-2{\cdot}0\mathrm{E}-01,\ 2{\cdot}0\mathrm{E}-01]\,,\quad X_{2,2}^{(0)} = [-2{\cdot}0\mathrm{E}-01,\ 2{\cdot}2\mathrm{E}+00]$$
$$X_{1,3}^{(0)} = [-2{\cdot}0\mathrm{E}-01,\ 2{\cdot}0\mathrm{E}-01]\,,\quad X_{2,3}^{(0)} = [-2{\cdot}0\mathrm{E}-01,\ 2{\cdot}0\mathrm{E}-01]$$

$$X_{3,1}^{(0)} = [-2{\cdot}0\mathrm{E}-01,\ 2{\cdot}0\mathrm{E}-01]$$
$$X_{3,2}^{(0)} = [-2{\cdot}0\mathrm{E}-01,\ 2{\cdot}0\mathrm{E}-01]$$
$$X_{3,3}^{(0)} = [-2{\cdot}0\mathrm{E}-01,\ 2{\cdot}2\mathrm{E}+00]$$

Das kombinierte Verfahren benötigte

1 Schritt nach (1)

3 Schritte nach (4)

bis zum Stillstand der Iteration. Das Ergebnis $\boldsymbol{X}$ war:

$$X_{1,1} = [\ 1{\cdot}02272727272\mathrm{E}+00,\ \ 1{\cdot}02272727273\mathrm{E}+00]$$
$$X_{1,2} = [\ 1{\cdot}13636363636\mathrm{E}-01,\ \ 1{\cdot}13636363637\mathrm{E}-01]$$
$$X_{1,3} = [-1{\cdot}13636363637\mathrm{E}-01,\ -1{\cdot}13636363636\mathrm{E}-01]$$
$$X_{2,1} = [\ 1{\cdot}13636363636\mathrm{E}-01,\ \ 1{\cdot}13636363637\mathrm{E}-01]$$
$$X_{2,2} = [\ 1{\cdot}02272727272\mathrm{E}+00,\ \ 1{\cdot}02272727273\mathrm{E}+00]$$

$$
\begin{aligned}
X_{2,3} &= [-1{\cdot}13636363637\mathrm{E}-01.\ -1{\cdot}13636363636\mathrm{E}-01] \\
X_{3,1} &= [-1{\cdot}13636363637\mathrm{E}-01,\ -1{\cdot}13636363636\mathrm{E}-01] \\
X_{3,2} &= [-1{\cdot}13636363637\mathrm{E}-01,\ -1{\cdot}13636363636\mathrm{E}-01] \\
X_{3,3} &= [\ \ 1{\cdot}02272727272\mathrm{E}+00,\ \ \ 1{\cdot}02272727273\mathrm{E}+00]
\end{aligned}
$$

Literatur

[1] *J. Albrecht:* Bemerkungen zum Iterationsverfahren von Schulz zur Matrixinversion. Z. Angew. Math. Mech. 41 (1961), 262—263.

[2] *G. Alefeld, J. Herzberger:* Introduction to Interval Computations. Academic Press, New York 1983.

[3] *G. Alefeld, J. Herzberger:* Matrizeninvertierung mit Fehlererfassung. Elektron. Datenverarbeitung 12 (1970), 410—416.

[4] *J. Herzberger:* Über ein Iterationsverfahren zur Einschließung der inversen Matrix. Computing 35 (1985), 185—188.

[5] *J. Herzberger:* On the *R*-Order of some Recurrences with Application to Inclusion-Methods. Computing 36 (1986), 175—180.

[6] *M. Köster:* Ein effizienter Algorithmus zur iterativen Einschließung der inversen Matrix. Leistungsnachweis, Universität Oldenburg, Fachbereich Mathematik, (1985).

[7] Wissenschaftliches Rechnen und Programmiersprachen, U. Kulisch, Ch. Ullrich (Hrsg.). B. G. Teubner, Stuttgart 1982.

Souhrn

ÚČINNÝ ALGORITMUS ITERATIVNÍHO PŘIBLÍŽENÍ INVERZNÍ MATICE

JÜRGEN HERZBERGER

Je popsán kombinovaný algoritmus pro aproximaci inverzní matice. Jde přitom o intervalovou verzi Schulzovy metody. Dokazuje se, že algoritmus je právě tak účinný, jako dosud známý algoritmus z [2], ale že je z hlediska hromadění zaokrouhlovacích chyb výhodnější. Je uveden numerický příklad.

Резюме

ДЕЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИФМ ИТЕРАТИВНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Jürgen HERZBERGER

В статье описан комбинированный алгорифм для приближения обратной матрицы, представляющий собой интервальную версию метода Шульца. Доказывается, что действенность алгорифма такая же как в случае известного алгорифма из [2], но что он более выгоден с точки зрения аккумуляции ошибок округления. Приводится численный пример.

Anschrift des Verfassers: Prof. *Dr. J. Herzberger*, Universität Oldenburg, Ammerländer Heerstraße 67—99, D-2900 Oldenburg.