

Walter Wunderlich

Polkonfigurationen in der äquiiformen Kinematik

*Aplikace matematiky*, Vol. 32 (1987), No. 4, 290–300

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104260>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1987

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## POLKONFIGURATIONEN IN DER ÄQUIFORMEN KINEMATIK

WALTER WUNDERLICH

(Eingegangen am 23. Januar 1986)

*Zusammenfassung.* Im allgemeinen ist die relative Momentanbewegung zweier komplanarer ähnlich-veränderlicher Systeme  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$  als Spirallung um einen *Pol*  $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$  aufzufassen (Abb. 1). Die bei drei Systemen  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \Sigma_\gamma$  auftretenden drei Pole  $p_{\alpha\beta}, p_{\alpha\gamma}, p_{\beta\gamma}$  bestimmen einen „Dreipolkreis“  $Q_{\alpha\beta\gamma}$ , dessen Punkte die folgende Eigenschaft aufweisen: Für einen Beobachter in einem der drei Systeme sind die Bahntangenten eines Punktes von  $Q_{\alpha\beta\gamma}$  gleichgerichtet, egal zu welchem der beiden anderen Systeme er gezählt wird; sie weisen überdies zu einem bestimmten „Zielpunkt“  $s_{\alpha\beta\gamma} \in Q_{\alpha\beta\gamma}$  hin (Abb. 2). Vier Systeme  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \Sigma_\gamma, \Sigma_\delta$  geben Anlaß zu vier Dreipolkreisen, die einen Punkt, den „Viererpole“  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , gemeinsam haben; die vier zugehörigen Zielpunkte liegen zusammen mit dem Viererpole auf einer Geraden (Abb. 3). Diese Beziehungen beherrschen auch den bei  $n > 4$  maßgebenden *Polplan* (Abb. 4).

## 1. EINFÜHRUNG

Die Idee, fundamentale Begriffe und Sätze der klassischen, euklidischen Kinematik starrer Systeme, die als Grundlage der Getriebelehre von technischer Bedeutung ist, auf die Theorie gesätzmäßig veränderlicher Systeme zu übertragen, geht schon auf L. Burmester [2] zurück. Besonders weitgehend gelingt dies bei der Betrachtung ähnlich-veränderlicher Systeme, die vor allem von tschechischen Geometern eingehend studiert worden sind. Historische Hinweise auf die Entwicklung dieser „äquiformen Kinematik“ (oder „ $\mathcal{E}$ -Kinematik“) findet man u.a. bei O. Bottema [1] und K. Drábek [3].

Angeregt durch einen Vortrag von M. Pišl [4], soll im vorliegenden Beitrag die Verteilung der momentanen Geschwindigkeitspole von mehreren ähnlich-veränderlichen Systemen in der Ebene untersucht werden. In der euklidischen Kinematik liegen bekanntlich die drei Relativpole von je drei komplanaren Systemen auf einer „Polgeraden“, wie S. Aronhold (1872) und A. B. W. Kennedy (1886) erkannt haben.

Sei also  $\Sigma'|\Sigma$  ein äquiformer Zwangslauf, d.h. ein einparametrischer Bewegungsvorgang einer ähnlich-veränderlichen *Gangebene*  $\Sigma'$  gegenüber einer fest gedachten, mit ihr zusammenfallenden *Rastebene*  $\Sigma$ . Nach Einführung kartesischer Koordinaten  $x, y$  in  $\Sigma$  und  $x', y'$  in  $\Sigma'$ , und unter Verwendung der komplexen Größen  $z = x + iy$

und  $z' = x' + iy'$ , wird dann der (reelle) Zwanglauf  $\Sigma'/\Sigma$  in bekannter Weise beschrieben durch

$$(1.1) \quad z = az' + b \quad \text{mit} \quad a = a(t), \quad b = b(t),$$

wobei  $a(t)$  und  $b(t)$  komplexe  $C^1$ -Funktionen des reellen Zeitparameters  $t$  sind.  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  erscheinen solcherart als Gaußsche Zahlenebenen aufgefaßt.

Die Gleichung (1.1) gibt für jeden Augenblick  $t$  die Position von  $\Sigma'$  an und stellt mit variablem  $t$  und  $z' = \text{const}$  in Parameterform die *Bahn*  $K$  dar, die der gangfeste Punkt  $z' \in \Sigma'$  in der Ebene  $\Sigma$  durchläuft.

Durch Ableitung von (1.1) nach  $t$  (angedeutet durch einen übergesetzten Punkt) erhält man mit

$$(1.2) \quad \dot{z} = \dot{a}z' + \dot{b}$$

den jeweiligen *Geschwindigkeitsvektor*  $\dot{z}$ , der, repräsentiert durch die orientierte Strecke vom Ursprung  $0$  zum Punkt  $\dot{z} \in \Sigma$ , die Richtung der *Tangente* der Bahn  $K$  in  $z$  anzeigt (Abb. 1).

## 2. GESCHWINDIGKEITSVERTEILUNG UND MOMENTANPOL

Jener Punkt  $z' = p'$  in  $\Sigma'$ , der momentan in Ruhe ist, wird gemäß (1.2) bestimmt durch

$$(2.1) \quad 0 = \dot{a}p' + \dot{b}.$$

Er heißt der momentane Geschwindigkeitspol oder kurz „*Pol*“. Seine Lage  $z = p$  in  $\Sigma$  ist zufolge (1.1) gegeben durch

$$(2.2) \quad p = ap' + b.$$

Durch Differenzenbildung von (1.2) und (2.1) sowie von (1.1) und (2.2) gelangt man zu der wichtigen Relation

$$(2.3) \quad \dot{z} = c(z - p) \quad \text{mit} \quad c = \dot{a}/a = \dot{\rho} \cdot e^{i\sigma} = \dot{\rho}(\cos \sigma + i \sin \sigma).$$

Dies bedeutet in jedem Augenblick, in welchem  $a \dot{a} \neq 0$ : *Die Bahntangenten in allen Punkten  $z \neq p$  bilden mit den zugehörigen Polstrahlen  $pz$  den gleichen Winkel  $\sigma = \arg c$ . Die Beträge der Geschwindigkeitsvektoren sind zur Poldistanz  $|z - p|$  proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor den Wert  $\rho = |c|$  hat. Mit anderen Worten: Bei einem ebenen äquiformen Zwanglauf herrscht in jedem Augenblick die gleiche Geschwindigkeitsverteilung wie bei einer Spiraling um den Momentanpol.*

Die Darstellung dieser Ersatzspiraling ergibt sich durch Integration von (2.3) mit  $c = \text{const}$  und  $p = \text{const}$  in der Gestalt

$$(2.4) \quad z = e^{c(t-t_0)}(a_0z' + b_0),$$

wobei  $t_0$  den betrachteten Zeitpunkt bezeichnet und  $a_0 = a(t_0)$ ,  $b_0 = b(t_0)$  bedeutet. Ihre Bahnkurven  $z' = \text{const}$  bilden unter der Voraussetzung  $\sigma \neq 0 \pmod{\pi/2}$  eine Drehschar von *logarithmischen Spiralen*  $L$  mit dem gemeinsamen Wickelpunkt  $p$ , welche die ursprünglichen Bahnkurven  $K$  berühren. (Abb. 1). Für  $\sigma = \pm\pi/2$  ist die Momentanbewegung eine Drehung um  $p$ .

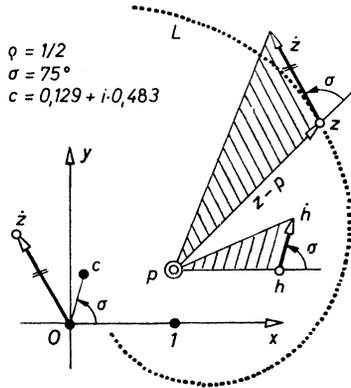


Abb. 1. Momentanspiralung.

Zur graphischen Festlegung des Geschwindigkeitsfeldes genügt die Angabe des Momentanpols  $p$  sowie eines beliebigen Hilfspunktes  $h \neq p$  mit seinem Geschwindigkeitsvektor  $\dot{h}$ . Die konstruktive Ermittlung des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{z}$  in einem weiteren Punkt  $z$  beruht dann auf der ähnlichen Übertragung des Dreiecks  $(p, h, h + \dot{h})$  nach  $(p, z, z + \dot{z})$ , wie es Abb. 1 zeigt.

Die Umkehrbewegung  $\Sigma/\Sigma'$  des ursprünglichen Zwanglaufs  $\Sigma'/\Sigma$  (1.1) wird beschrieben durch

$$(2.5) \quad z' = a'z + b' \quad \text{mit} \quad a' = 1/a, \quad b' = -b/a.$$

Die sich deckenden Pole  $p \in \Sigma$  und  $p' \in \Sigma'$  vertauschen bloß ihre Rollen, während die Geschwindigkeitsvektoren ihre Orientierung wechseln, was  $\sigma' = \sigma + \pi \pmod{2\pi}$  bedingt. Dies geht auch aus der (2.3) entsprechenden Geschwindigkeitsformel

$$(2.6) \quad \dot{z}' = c'(z' - p') \quad \text{mit} \quad c' = a'/a' = -\dot{a}/a = -c$$

hervor.

### 3. DREIPOLKREIS

Seien nun  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zwei ähnlich-veränderliche Gangsysteme, die von einem festgedachten, neutralen Rastsystem  $\Sigma$  aus beobachtet werden. Die simultanen Momentanbewegungen der äquiformen Zwangläufe  $\Sigma_1/\Sigma$  und  $\Sigma_2/\Sigma$  seien durch die Pole  $p_1$  bzw.  $p_2$  und die komplexen Spiralkonstanten  $c_1 = q_1 \exp(i\sigma_1)$  bzw.  $c_2 = q_2 \exp(i\sigma_2)$

festgelegt, wobei  $p_1 \neq p_2$  und  $c_1 \neq c_2$  angenommen werde. Für die beiden an einer Stelle  $z \in \Sigma$  befindlichen Punkte aus  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  werden vom Beobachter in  $\Sigma$  gemäß (2.3) die im allgemeinen verschiedenen Geschwindigkeitsvektoren

$$(3.1) \quad \dot{z}_\alpha = c_\alpha(z - p_\alpha), \quad \alpha = 1, 2$$

gemessen.<sup>1)</sup>

Die Relativbewegung  $\Sigma_2/\Sigma_1$  ist naturgemäß ebenfalls eine äquiforme und besitzt im Augenblick einen gewissen *Relativpol*, der, als Element von  $\Sigma_2$  aufgefaßt, für einen Beobachter in  $\Sigma_1$  in Ruhe erscheint. Dieser momentane Relativpol gilt – im Einklang mit der Schlußbemerkung in Abschnitt 2 – demnach auch für die Umkehrbewegung  $\Sigma_1/\Sigma_2$  und ist für den Beobachter in  $\Sigma$  durch gleiche Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$  gekennzeichnet. Für seine Lage  $z = p_{12} = p_{21}$  in  $\Sigma$  hat man daher auf Grund von (3.1) die Formel

$$(3.2) \quad p_{12} = p_{21} = \frac{c_1 p_1 - c_2 p_2}{c_1 - c_2}.$$

Fragt man, in Abschwächung der Bedingung  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$ , nach jenen Punkten  $z$  in  $\Sigma$ , für welche bloß  $\dot{z}_1 \parallel \dot{z}_2$  gilt, so verlangt diese Forderung die Realität des Quotienten  $\dot{z}_1/\dot{z}_2$ . Mit Benützung der konjugiert-komplexen Zahlen  $\bar{z}$ ,  $\bar{c}$  und  $\bar{p}$  gelangt man so über  $\dot{z}_1 : \dot{z}_2 = \dot{\bar{z}}_1 : \dot{\bar{z}}_2$  unter Berufung auf (3.1) zu

$$(3.3) \quad c_1 \bar{c}_2 (z - p_1) (\bar{z} - \bar{p}_2) = c_2 \bar{c}_1 (z - p_2) (\bar{z} - \bar{p}_1).$$

Damit hat man – in isotropen Koordinaten  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  – die Gleichung eines Kreises  $Q_{12}$ , sofern  $c_1 \bar{c}_2 \neq \bar{c}_1 c_2$ , also  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \pmod{\pi}$ ; andernfalls würde sich  $Q_{12}$  zu einer Geraden abflachen. Dieser Kreis  $Q_{12}$  ( $= Q_{21}$ ) geht durch die drei Pole  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_{12}$  und mag daher als „*Dreipolkreis*“ angesprochen werden. Er stellt, wie schon M. Pišl [4] hervorgehoben hat, das äquiforme Analogon der Aronhold-Kennedyschen Geraden in der euklidischen Kinematik dar.

Eine andere Abschwächung der Bedingung  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$  besteht in der Frage nach allen Punkten  $z \in \Sigma$ , wo die Geschwindigkeiten bloß gleiche Beträge  $|\dot{z}_1| = |\dot{z}_2|$  haben. Über  $\dot{z}_1 \dot{\bar{z}}_1 = \dot{z}_2 \dot{\bar{z}}_2$  gelangt man auf Grund von (3.1) zu

$$(3.4) \quad c_1 \bar{c}_1 (z - p_1) (\bar{z} - \bar{p}_1) = c_2 \bar{c}_2 (z - p_2) (\bar{z} - \bar{p}_2).$$

Auch dies ist die isotrope Gleichung eines Kreises  $R_{12}$  ( $= R_{21}$ ), sofern  $c_1 \bar{c}_1 \neq c_2 \bar{c}_2$ , also  $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ; andernfalls würde  $R_{12}$  zu einer Geraden (der Symmetrale von  $p_1$  und  $p_2$ ) entarten. Dieser Kreis enthält naturgemäß ebenfalls den Relativpol  $p_{12}$ . Die Pole  $p_1$  und  $p_2$  liegen hingegen *invers* bezüglich  $R_{12}$ . Zum Nachweis bilde man die Polare  $P_1$  von  $p_1$  bezüglich  $R_{12}$ ; sie hat die Gleichung

$$(3.5) \quad \bar{d} \cdot (z - p_2) + d \cdot (\bar{z} - \bar{p}_2) = 0 \quad \text{mit} \quad d = p_2 - p_1.$$

<sup>1)</sup>Die Bezeichnung  $\dot{z}_\alpha$  soll ausnahmsweise nicht  $dz_\alpha/dt$  bedeuten, sondern abkürzend für  $(\dot{z})_\alpha$  oder  $\dot{z}(\alpha)$  stehen.

$P_1$  enthält mithin den Pol  $p_2$  und ist normal zur Geraden  $p_1 p_2$  (Abb. 2), womit die Behauptung erwiesen ist. Überdies folgt daraus, daß der Dreipolkreis  $Q_{12}$  ein *Orthogonalkreis* von  $R_{12}$  ist. Schreibt man die Bedingung (3.4) in der Form

$$(3.6) \quad |z - p_1| : |z - p_2| = \varrho_2 : \varrho_1,$$

so sieht man, daß  $R_{12}$  als *Apollonischer Kreis* des Punktepaars  $p_1, p_2$  aufgefaßt werden kann.

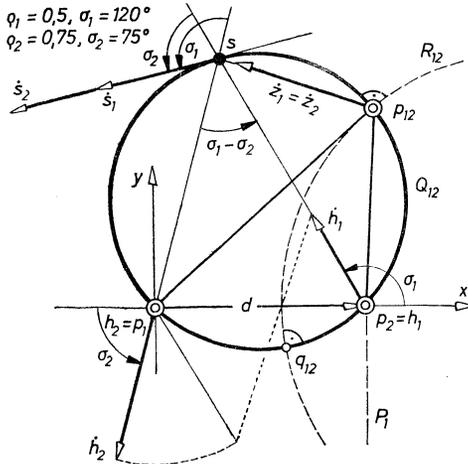


Abb. 2. Dreipolkreis.

Die beiden Kreise  $Q_{12}$  und  $R_{12}$  bieten auch einen Schlüssel zur *konstruktiven Ermittlung* des Relativpols  $p_{12}$ . Der momentane Bewegungszustand des Zwanglaufs  $\Sigma_1/\Sigma$  sei gemäß Abb. 1 festgelegt durch den Pol  $p_1$  und den Geschwindigkeitsvektor  $\dot{h}_1$  in einem Hilfspunkt  $h_1$ , der zweckmäßig in  $p_2$  angenommen wird (Abb. 2). Ebenso sei die Momentanbewegung von  $\Sigma_2/\Sigma$  gegeben durch den Pol  $p_2$  und den Geschwindigkeitsvektor  $\dot{h}_2$  des in  $p_1$  gewählten Hilfspunkts  $h_2$ . Faßt man dann den Schnittpunkt  $s$  der Bahntangenten von  $h_1$  und  $h_2$  ins Auge, und sucht man mittels der in Abschnitt 2 vermerkten Regel seine Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{s}_1$  und  $\dot{s}_2$  auf, so erkennt man aus einfachen Winkelbeziehungen in Abb. 2, daß dieselben gleichgerichtet sind. Damit ist  $s$  als Mitglied des Dreipolkreises  $Q_{12}$  charakterisiert, der nun als Umkreis des Dreiecks  $p_1 p_2 s$  gezeichnet werden kann. Weitere Punkte  $z$  mit der Eigenschaft  $\dot{z}_1 \parallel \dot{z}_2$  könnte man erhalten, wenn man die Polstrahlen  $p_1 s$  und  $p_2 s$  um gleiche Winkel verdreht und miteinander schneidet. Hierbei bemerkt man überdies: Die (zusammenfallenden) Bahntangenten aller auf dem Dreipolkreis  $Q_{12}$  liegenden Punkte von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  gehen allesamt durch den Punkt  $s \in Q_{12}$ .<sup>2)</sup> Für

<sup>2)</sup> Dort wird  $Q_{12}$  von  $\dot{s}_1$  und  $\dot{s}_2$  berührt.

diesen „Zielpunkt“  $s$ , besser  $s_{12}$ , gelten die Formeln

$$(3.7) \quad (c_1 \bar{c}_2 - \bar{c}_1 c_2) \cdot s_{12} = (c_1 - \bar{c}_1) c_2 p_2 - (c_2 - \bar{c}_2) c_1 p_1$$

oder

$$(3.8) \quad s_{12} \cdot \sin(\sigma_1 - \sigma_2) = p_2 \cdot \exp(i\sigma_2) \sin \sigma_1 - p_1 \cdot \exp(i\sigma_1) \sin \sigma_2.$$

Den Apollonischen Kreis  $R_{12}$  ermittelt man am besten mithilfe der Endpunkte seines auf der Verbindungsgeraden von  $p_1$  und  $p_2$  liegenden Durchmessers, welche zufolge (3.6) die Strecke  $p_1 p_2$  innerlich und äußerlich in dem bekannten Verhältnis  $Q_2:Q_1 = |\dot{h}_2|:|\dot{h}_1|$  teilen (Abb. 2). Von den beiden Schnittpunkten der (orthogonalen) Kreise  $Q_{12}$  und  $R_{12}$  ist einer der gesuchte Relativpol  $p_{12}$ ; dort ist  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$ . Im anderen,  $q_{12}$ , ist  $\dot{z}_1 = -\dot{z}_2$ ; die Entscheidung ist in jedem Fall unschwer zu treffen (Abb. 2).

#### 4. DREI GANGSYSTEME

Im Hinblick darauf, daß das bislang verwendete Bezugssystem  $\Sigma$  bloß fest zu denken war, erscheint es gegenüber den beweglichen Systemen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  nur dadurch ausgezeichnet, daß es die Rechnung erleichtert und einfache Formeln liefert. Die Ergebnisse lassen sich demnach in allgemeinerer Form (und mit modifizierten Bezeichnungen) zusammenfassen in

**Satz 1.** *Irgenddreier komplanare und zwangsläufig gekoppelte ähnlich-veränderliche Systeme  $\Sigma_1, \Sigma_2$  und  $\Sigma_3$  geben im allgemeinen in jedem Augenblick Anlaß zu drei verschiedenen Relativpolen  $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$  ( $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\alpha \neq \beta$ ) und einem sie verbindenden Dreipolkreis  $Q_{123}$ . Für einen Beobachter in einem beliebigen der drei Systeme weisen die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte von  $Q_{123}$ , gleichgültig zu welchem der beiden anderen Systeme sie gezählt werden, stets zum selben Zielpunkt  $s_{123} \in Q_{123}$  hin.*

Unter der Annahme, daß die Lagenfolgen der drei beweglichen Ebenen bezüglich eines neutralen, fest gedachten Systems  $\Sigma$  nach dem Vorbild (1.1) durch Gleichungen

$$(4.1) \quad z = a_\alpha z_\alpha + b_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad \text{mit} \quad a_\alpha = a_\alpha(t), \quad b_\alpha = b_\alpha(t)$$

gegeben sind, sollen die Formeln für die Relativpole  $p_{\alpha\beta}$  und den Dreipolkreis  $Q_{123}$  hergeleitet werden. Für den von  $\Sigma$  aus beobachteten Geschwindigkeitsvektor  $\dot{z}_\alpha$  eines gangfesten Punktes  $z_\alpha \in \Sigma_\alpha$  findet man nach dem Vorgang in Abschnitt 2 die grundlegende Beziehung

$$(4.2) \quad \dot{z}_\alpha = c_\alpha(z - p_\alpha) \quad \text{mit} \quad c_\alpha = \dot{a}_\alpha/a_\alpha = Q_\alpha \cdot \exp(i\sigma_\alpha),$$

wobei

$$(4.3) \quad p_\alpha = b_\alpha - (\dot{b}_\alpha a_\alpha / \dot{a}_\alpha)$$

die Lage des Momentanpols von  $\Sigma_\alpha/\Sigma$  bezeichnet.

Für den *Relativpol*  $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$  von  $\Sigma_\alpha/\Sigma_\beta$  und  $\Sigma_\beta/\Sigma_\alpha$  muß  $\dot{z}_\alpha = \dot{z}_\beta$  sein. Seine Lage in  $\Sigma$  ist daher zufolge (4.2) bestimmt durch

$$(4.4) \quad p_{\alpha\beta} = \frac{c_\alpha p_\alpha - c_\beta p_\beta}{c_\alpha - c_\beta}.$$

Für die Punkte des *Dreipolkreises*  $Q_{123}$  (mit ungeordnetem Indextripel) müssen gemäß Satz 1 etwa die von  $\Sigma_1$  aus festzustellenden Relativgeschwindigkeiten  $\dot{z}_2 - \dot{z}_1$  und  $\dot{z}_3 - \dot{z}_1$  gleichgerichtet sein. Dies führt über die Realitätsbedingung

$$(4.5) \quad (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) : (\dot{z}_3 - \dot{z}_1) = (\dot{\bar{z}}_2 - \dot{\bar{z}}_1) : (\dot{\bar{z}}_3 - \dot{\bar{z}}_1)$$

mit Beachtung von (4.2) auf die Gleichung

$$(4.6) \quad c_2 \bar{c}_3 (z - p_2) (\bar{z} - \bar{p}_3) - c_1 \bar{c}_3 (z - p_1) (\bar{z} - \bar{p}_3) - c_2 \bar{c}_1 (z - p_2) (\bar{z} - \bar{p}_1) = \\ = c_3 \bar{c}_2 (z - p_3) (\bar{z} - \bar{p}_2) - c_3 \bar{c}_1 (z - p_3) (\bar{z} - \bar{p}_1) - c_1 \bar{c}_2 (z - p_1) (\bar{z} - \bar{p}_2).$$

Nach Auswertung gelangt man so für den Dreipolkreis  $Q_{123}$  zur isotropen Gleichung

$$(4.7) \quad Az\bar{z} + \bar{B}z - B\bar{z} + C = 0$$

mit

$$A = \bar{c}_1(c_2 - c_3) + \bar{c}_2(c_3 - c_1) + \bar{c}_3(c_1 - c_2) = -\bar{A},$$

$$B = \bar{c}_1(c_2 p_2 - c_3 p_3) + \bar{c}_2(c_3 p_3 - c_1 p_1) + \bar{c}_3(c_1 p_1 - c_2 p_2),$$

$$C = \bar{c}_1 \bar{p}_1 (c_2 p_2 - c_3 p_3) + \bar{c}_2 \bar{p}_2 (c_3 p_3 - c_1 p_1) + \bar{c}_3 \bar{p}_3 (c_1 p_1 - c_2 p_2) = -\bar{C}.$$

Der Mittelpunkt  $m_{123} \in \Sigma$  und der Radius  $r_{123}$  von  $Q_{123}$  ergeben sich durch Vergleich von (4.7) mit  $(z - m)(\bar{z} - \bar{m}) = r^2$  aus

$$(4.8) \quad m_{123} = B/A, \quad r_{123}^2 = (B\bar{B} - \bar{A}C)/A\bar{A} = (|B|^2 + AC)/|A|^2.$$

## 5. VIERERPOL

Tritt zu der Anordnung in Abschnitt 3 noch ein drittes Gangsystem  $\Sigma_3$  hinzu, dessen momentaner Bewegungszustand durch den Pol  $p_3$  und die Spiralkonstante  $c_3 = \varrho_3 \cdot \exp(i\sigma_3)$  gekennzeichnet ist, so hat man es mit insgesamt *sechs Polen*  $p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}$  zu tun. Sie verteilen sich zu je dreien auf *vier Dreipolkreise*  $Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}$  und  $Q_{123}$ , deren letzter durch (4.7) gegeben ist.

Die Kreise  $Q_{12}$  und  $Q_{13}$  haben neben dem Pol  $p_1$  noch einen Restschnittpunkt  $v$  gemeinsam, für dessen Geschwindigkeitsvektoren  $\dot{v}_1 \parallel \dot{v}_2$  und  $\dot{v}_1 \parallel \dot{v}_3$  gilt. Infolgedessen, nämlich wegen  $\dot{v}_2 \parallel \dot{v}_3$ , liegt  $v$  auch auf dem Kreis  $Q_{23}$ , und aus Gründen der Gleichberechtigung auch auf  $Q_{123}$  (Abb. 3). Weil der Punkt  $v$  also allen vier Dreipolkreisen angehört, mag er kurz „*Viererpol*“ heißen. Seine gemeinsame Bahntangente – gleichgültig zu welchem der drei Gangsysteme er gezählt wird – geht

durch die drei Zielpunkte  $s_{12} \in Q_{12}$ ,  $s_{13} \in Q_{13}$  und  $s_{23} \in Q_{23}$ , die nach dem Muster (3.7) oder (3.8) zu finden sind.

Zwecks Ermittlung des Viererpoles  $z = v$  in  $\Sigma$  ist der neben  $z = p_1$  vorhandene Restschnittpunkt der Kreise  $Q_{12}$  (3.3) und  $Q_{13}$  zu bestimmen. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$(5.1) \quad z - p_1 = \zeta, \quad c_\alpha / \bar{c}_\alpha = \exp(2i\sigma_\alpha) = \varepsilon_\alpha, \quad p_\beta - p_\alpha = d_{\alpha\beta} = -d_{\beta\alpha}$$

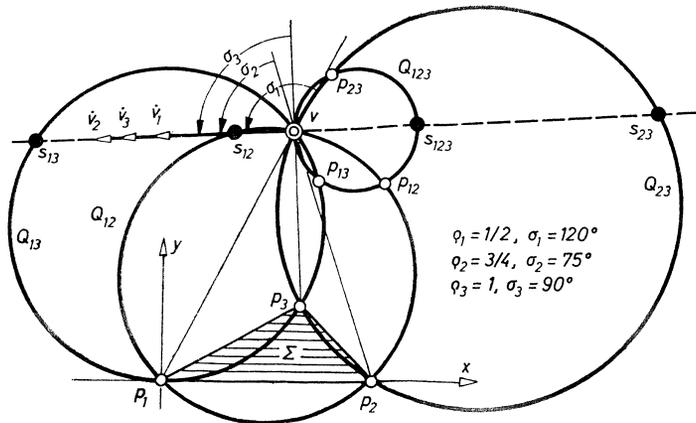


Abb. 3. Viererpol.

läuft diese Aufgabe auf die Lösung des Gleichungspaares

$$(5.2) \quad \begin{aligned} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \zeta \bar{\zeta} + \varepsilon_1 \bar{d}_{12} \cdot \zeta - \varepsilon_2 d_{12} \cdot \bar{\zeta} &= 0, \\ (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \zeta \bar{\zeta} + \varepsilon_1 \bar{d}_{13} \cdot \zeta - \varepsilon_3 d_{13} \cdot \bar{\zeta} &= 0 \end{aligned}$$

hinaus. Von

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \zeta \bar{\zeta} : \zeta : \bar{\zeta} &= \varepsilon_1 (\varepsilon_2 d_{12} \bar{d}_{13} - \varepsilon_3 d_{13} \bar{d}_{12}) : (\dots) : \\ &: -\varepsilon_1 (\varepsilon_1 \bar{d}_{23} + \varepsilon_2 \bar{d}_{31} + \varepsilon_3 \bar{d}_{12}) \end{aligned}$$

gelangt man so zunächst zu einem Ausdruck für  $\zeta = \zeta \bar{\zeta} : \bar{\zeta}$  und anschließend über  $v = p_1 + \zeta$  zu

$$(5.4) \quad v = \frac{\varepsilon_1 p_1 \bar{d}_{23} + \varepsilon_2 p_2 \bar{d}_{31} + \varepsilon_3 p_3 \bar{d}_{12}}{\varepsilon_1 \bar{d}_{23} + \varepsilon_2 \bar{d}_{31} + \varepsilon_3 \bar{d}_{12}}.$$

Das Hauptresultat sei gleich in verallgemeinerter Fassung (und mit entsprechend modifizierten Bezeichnungen) festgehalten in

**Satz 2.** *Irgendvier komplanare und zwangläufig gekoppelte ähnlich-veränderliche Systeme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$  geben im allgemeinen in jedem Augenblick Anlaß zu sechs verschiedenen Relativpolen  $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$ , die sich zu je dreien auf vier Dreipolkreise*

$Q_{\alpha\beta\gamma}$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ ) verteilen. Diese vier Polkreise haben einen Punkt, den Viererpol  $v_{1234}$ , gemeinsam. Die dort befindlichen Systempunkte rufen in den anderen Systemen insgesamt zwölf Bahntangenten hervor, die sämtlich in einer Geraden zusammenfallen, welche alle vier Zielpunkte  $s_{\alpha\beta\gamma} \in Q_{\alpha\beta\gamma}$  enthält.

Alle bisher aufgestellten Formeln wurden anhand der Daten der graphisch entwickelten Figuren numerisch überprüft.

## 6. POLPLÄNE

Auf die Herleitung einer verallgemeinerten Formel für den Viererpol  $v_{1234}$  aus Satz 2 unter der Annahme eines neutralen Bezugssystems  $\Sigma$  – wie dies mit (4.6) für den Dreipolkreis  $Q_{123}$  geschehen ist – wurde im Hinblick auf den beträchtlichen Aufwand verzichtet. Offen bleibt daher auch die Frage, ob sich bei fünf vorhandenen Systemen etwas über die Verteilung der dann auftretenden fünf Viererpole aussagen läßt.

Um eine Vorstellung zu gewinnen, wurde zu den drei in Abb. 3 betrachteten Systemen  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  (mit den dort ersichtlichen Daten) noch ein viertes System  $\Sigma_4$

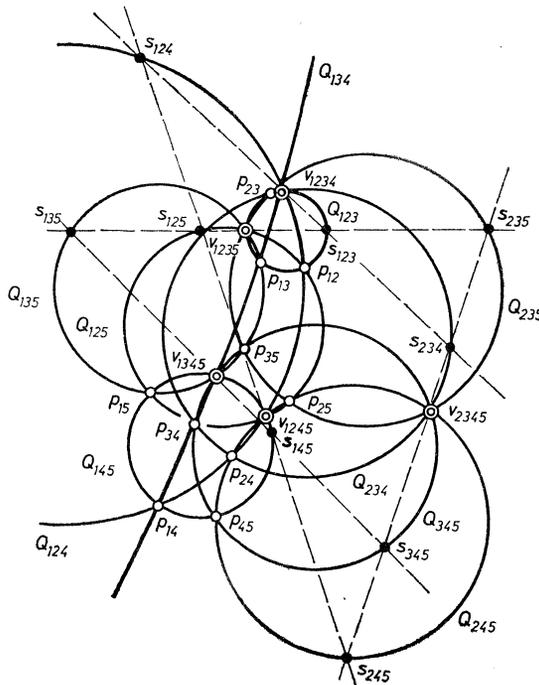


Abb. 4. Polplan für fünf Systeme.

hinzugefügt ( $\varrho_4 = 1$ ,  $\sigma_4 = 225^\circ$ ). Die dann entstehende *Konfiguration* ist in Abb. 4 wiedergegeben, wobei die Beschriftung darauf beruht, daß das Bezugssystem  $\Sigma$  als fünftes System  $\Sigma_5$  fungiert. Dieser „Polplan“ enthält 10 Relativpole  $p_{\alpha\beta}$ , 10 Dreipolkreise  $Q_{\alpha\beta\gamma}$  und 5 Viererpole  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Eingetragen sind auch die 10 Zielpunkte  $s_{\alpha\beta\gamma} \in Q_{\alpha\beta\gamma}$ . Sie liegen jeweils zu viert zusammen mit einem Viererpol auf einer von insgesamt 5 Geraden und bilden solcherart die Ecken eines vollständigen Fünfseits.

Diese durch Satz 2 bedingten Beziehungen sind auch bei  $n > 5$  komplanaren ähnlich-veränderlichen Systemen  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  maßgebend. Der in jedem Augenblick vorhandene *Polplan* umfaßt  $\binom{n}{2}$  Relativpole  $p_{\alpha\beta}$ ; die Pole  $p_{\alpha\beta}, p_{\alpha\gamma}, p_{\beta\gamma}$  bestimmen einen Dreipolkreis  $Q_{\alpha\beta\gamma}$  von insgesamt  $\binom{n}{3}$  solchen. Die vier Polkreise  $Q_{\alpha\beta\gamma}, Q_{\alpha\beta\delta}, Q_{\alpha\gamma\delta}, Q_{\beta\gamma\delta}$  haben den Viererpol  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$  von insgesamt  $\binom{n}{4}$  solchen gemeinsam. Jeder Dreipolkreis  $Q_{\alpha\beta\gamma}$  enthält einen Zielpunkt  $s_{\alpha\beta\gamma}$ ; dorthin zielen, für einen Beobachter in  $\Sigma_\gamma$ , die durch die Bewegungen  $\Sigma_\alpha/\Sigma_\gamma$  und  $\Sigma_\beta/\Sigma_\gamma$  bewirkten Fortschreitrichtungen sämtlicher Punkte von  $Q_{\alpha\beta\gamma}$ , je nachdem ob man dieselben zu  $\Sigma_\alpha$  oder  $\Sigma_\beta$  zählt. Weitere gleichartige Deutungen von  $s_{\alpha\beta\gamma}$  erhält man durch Permutation von  $\alpha, \beta, \gamma$  (Satz 1). Je vier Zielpunkte  $s_{\alpha\beta\gamma}, s_{\alpha\beta\delta}, s_{\alpha\gamma\delta}, s_{\beta\gamma\delta}$  liegen zusammen mit dem Viererpol  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$  auf einer Geraden. Je  $n - 3$  dieser  $\binom{n}{4}$  Geraden haben einen Zielpunkt gemeinsam.

#### Literatur

- [1] O. Bottema, B. Roth: Theoretical Kinematics. Amsterdam—New York—Oxford 1979.
- [2] L. Burmester: Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme. Z. Math. Phys. 19 (1874), 154—169. — Lehrbuch der Kinematik. Leipzig 1888.
- [3] K. Drábek, J. Chudý, Z. Pírko: Beiträge zur  $\mathcal{E}$ -Kinematik in der Ebene;  $\mathcal{E}$ -Rotationen mit geradliniger, kreis- und spiralförmiger Mapped. Acta Polytechn. (Práce ČVUT v Praze) 10 (IV/1, 1981), 5—22.
- [4] M. Pišl: Eine Verallgemeinerung der Aronhold-Kennedy-Gerade. Kinematik-Tagung Oberwolfach, 26.—30. 4. 1982.

#### Souhrn

### PÓLOVÁ KONFIGURACE V EKVIFORMNÍM POHYBU

WALTER WUNDERLICH

Obecně je relativní okamžitý pohyb dvou komplanárních podobně proměnlivých systémů  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$  spirálním pohybem kolem pólu  $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$  (obr. 1). Tři póly  $p_{\alpha\beta}, p_{\alpha\gamma}, p_{\beta\gamma}$  vystupující při třech systémech  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \Sigma_\gamma$  určují „kružnici tří pólů“  $Q_{\alpha\beta\gamma}$ , jejíž body mají tuto vlastnost: Pro pozorovatele v jednom ze tří systémů jsou tečny trajektorií bodu této kružnice téhož směru

bez ohledu na to, zda jej počítáme k jednomu nebo druhému systému; mají směr do tzv. „cílového bodu“  $s_{\alpha\beta\gamma} \in Q_{\alpha\beta\gamma}$  (obr. 2). Čtyři systémy  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \Sigma_\gamma, \Sigma_\delta$  dávají čtyři kružnice pólů, které mají společný bod  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$  tzv. „čtyřpól“. Čtyři příslušné cílové body leží na přímce procházející čtyřpólem (obr. 3). Tyto vztahy se vyskytují také při pólovém plánu pro  $n > 4$  (obr. 4).

## Резюме

### ПОЛЮСНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ В ЭКВИФОРМНОМ ДВИЖЕНИИ

WALTER WUNDERLICH

В общем случае относительное мгновенное движение двух компланарных меняющихся подобным образом систем  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$  представляет собой винтообразное движение вокруг полюса  $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$  (рис. 1). Три полюса  $p_{\alpha\beta}, p_{\alpha\gamma}, p_{\beta\gamma}$ , появляющиеся в случае трех систем  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \Sigma_\gamma$ , определяют „окружность трех полюсов“  $Q_{\alpha\beta\gamma}$ , точки которой обладают следующим свойством: Для наблюдателя в одной из этих трех систем касательные траекторий точки этой окружности имеют одно и то же направление независимо от того, в какой системе она рассматривается, и все направлены в так называемую „целевую точку“  $s_{\alpha\beta\gamma} \in Q_{\alpha\beta\gamma}$  (рис. 2). Четыре системы  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \Sigma_\gamma, \Sigma_\delta$  порождают четыре окружности полюсов, которые обладают общей точкой  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , так называемым „четыреполюсом“. Соответствующие четыре целевые точки лежат на прямой проходящей через четыреполюс. Эти соотношения имеются также для большего числа систем.

*Anschrift des Verfassers:* Emer. Prof. Dr. *Walter Wunderlich*, Institut für Geometrie, Technische Universität, Wiedner Hauptstraße 8–10, A-1040 Wien, Österreich.