

Aplikace matematiky

Miroslav Šisler

Über die Konvergenz eines symmetrischen Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Aplikace matematiky, Vol. 35 (1990), No. 6, 471–480

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104429>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1990

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER DIE KONVERGENZ EINES SYMMETRISCHEN ITERATIONSVERFAHREN FÜR LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

MIROSLAV ŠISLER

(Angegangen am 12. 12. 1987)

Zusammenfassung. In der Arbeit wird ein gewisses dreiparametrisches symmetrisches Iterationsverfahren für die Lösung des linearen Gleichungssystems der Form $x = Bx + b$ mit einer schwach zweizyklischen Matrix B untersucht. Die Arbeit befasst sich mit der Konvergenzoptimierung dieses Iterationsverfahrens in zwei Fällen, die sich durch die Wahl der Parameter unterscheiden.

Keywords: linear system, iterative method, weakly cyclic matrix

AMS Classification: 65F10

Die Arbeit befasst sich mit einer gewissen Variante des, in der Arbeit [2] definierten Iterationsverfahrens für die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Form

$$(1) \quad x = Bx + b,$$

wo

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} O, & U \\ L, & O \end{pmatrix}$$

eine schwach zweizyklische Blockmatrix mit quadratischen Diagonalblöcken ist; $I - B$ ist dabei eine nichtsinguläre Matrix. Ähnlicherweise, wie in der Arbeit [2], definieren wir das Iterationsverfahren durch die Beziehungen

$$(3) \quad x_{v+1} = S(\alpha_1, \alpha_2, \beta) x_v + L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) b_U + b_L;$$

dabei sind $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, β drei reelle Parameter und es gilt

$$(4) \quad S(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) U(\alpha_1, \alpha_2, \beta),$$

$$(5) \quad L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) I, & U \\ (\beta + 1) L, & (\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix},$$

$$b_L = \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} b,$$

$$(6) \quad U(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_2 I, & \beta U \\ O, & \alpha_1 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ L, & (\alpha_1 - 1) I \end{pmatrix},$$

$$b_U = \begin{pmatrix} \alpha_2 I, & \beta U \\ O, & \alpha_1 I \end{pmatrix}^{-1} b.$$

Aus (3), (4), (5), (6) folgt, dass man die Iterationsformel auch in der Form

$$x_{v+1/2} = U(\alpha_1, \alpha_2, \beta) x_v + b_U,$$

$$x_{v+1} = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) x_{v+1/2} + b_L$$

schreiben kann. Der Unterschied zwischen dieser Methode und der Methode von der Arbeit [2] liegt in der abweichenden Definition der Matrix $U(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ und des Vektors b_U , wo die Parameter α_1, α_2 gegenseitig umgetauscht sind.

Es ist klar, dass das System (1) mit dem System

$$x = S(\alpha_1, \alpha_2, \beta) x + L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) b_U + b_L$$

genau dann äquivalent ist, wenn die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ nichtsingulär ist. Es gilt dabei folgender Hilfssatz.

Hilfssatz. Die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ist genau dann nichtsingulär, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ (\beta + 1) L, & (\alpha_1 + \alpha_2 - 1) I \end{pmatrix}$$

nichtsingulär ist.

Der Beweis des Hilfssatzes folgt sofort aus der Tatsache, dass die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ in der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ (\beta + 1) L, & (\alpha_1 + \alpha_2 - 1) I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 I, & \beta U \\ O, & \alpha_1 I \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I, & -U \\ -L, & I \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann und die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 I, & \beta U \\ O, & \alpha_1 I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I, & -U \\ -L, & I \end{pmatrix} = I - B$$

nach der Voraussetzung nichtsingulär sind.

Man führe jetzt folgende Bezeichnungen ein:

$$(7) \quad \begin{aligned} a &= \alpha_2(\beta + \alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2(1 + \beta), \\ b &= \alpha_2(\alpha_1 - 1)(\beta + \alpha_1 + \alpha_2), \\ c &= \lambda\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1), \\ d &= -\beta(\beta + \alpha_1 + \alpha_2), \\ e &= \alpha_1(\alpha_2 - 1)(\beta + \alpha_1 + \alpha_2), \\ f &= (\beta + \alpha_1)(\beta + \alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2(1 + \beta). \end{aligned}$$

Die Beziehung zwischen den Eigenwerten λ der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ und den Eigenwerten μ der Jacobi-Matrix B beschreibt der folgende Satz.

Satz 1. I. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ und die Zahl $\mu \neq 0$ genüge der Gleichung*

$$(8) \quad (a\mu^2 - c)(f\mu^2 - c) - b\mu^2(d\mu^2 + e) = 0.$$

Für jeden Eigenwert μ_i , $i = 1, \dots, n$ der Matrix B gelte die Beziehung $c^2 \neq \mu^2\mu_i^2\alpha_1^2\alpha_2^2(1 + \beta)^2$. Dann ist die Zahl μ ein Eigenwert der Matrix B .

II. A. *Es seien μ ein Eigenwert der Matrix B und λ eine Wurzel der Gleichung (8). Dann ist λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$.*

Bemerkung. Im Fall, dass B einen Eigenwert $\mu = 0$ besitzt (d.h. B singular ist), ist die Gleichung (8) der Form $c^2 = 0$, so dass die Zahl $\lambda = (1 - 1/\alpha_1)(1 - 1/\alpha_2)$ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ist.

Der Beweis der Satzes 1 läuft ähnlicherweise wie der Beweis des Satzes 1 aus der Arbeit [2].

Angesichts dessen, dass B eine schwach zweizyklische Matrix ist, kann man den folgenden, die Beziehung zwischen Eigenwerten der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ und Eigenwerten μ^2 der Matrix B^2 beschreibenden, Satz beweisen.

Satz 2. I. *Es sei die Zahl μ^2 ein Eigenwert der Matrix B^2 . Dann ist jede, der Zahl μ^2 entsprechende Wurzel λ der Gleichung (8), ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$.*

II. *Es sei λ ein Eigenwert der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$. Dann ist mindestens eine von den, der Gleichung (8) entsprechenden Zahlen μ^2 , ein Eigenwert der Matrix B^2 .*

Der Beweis dieses Satzes kann analogisch, wie der Beweis des Satzes 2 aus der Arbeit [2] durchgeführt werden.

In folgendem Teil dieser Arbeit befassen wir uns mit der optimalen Wahl der Parameter. Wir setzen dabei speziell voraus, dass für die Eigenwerte der Matrix B^2 die Ungleichungen

$$0 \leq m^2 = \min_i \mu_i^2 \leq \mu_i^2 \leq \max_i \mu_i^2 = M^2 < 1$$

gelten und dass für den Parameter β die Gleichheit $\beta = -1$ gilt. Wegen der Regularität der Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ muss man voraussetzen, dass $\alpha_1 + \alpha_2 - 1 \neq 0$ ist. Es gilt dann folgender Satz.

Satz 3. Es sei $\beta = -1$, α_1^0 sei eine beliebige Zahl mit

$$\alpha_1^0 \neq (1 + \sqrt{(1 - M^2)})/2, \quad \alpha_1^0 \neq 0, \quad \alpha_1^0 \neq 1$$

und es sei

$$(9) \quad \alpha_2^0 = (\alpha_1^0 - 1)(1 + \sqrt{(1 - M^2)})/[2\alpha_1^0 - (1 + \sqrt{(1 - M^2)})].$$

Dann ist

$$(10) \quad \min_{[\alpha_1, \alpha_2]} \varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, -1)) = \varrho(S(\alpha_1^0, \alpha_2^0, -1)) = \\ = [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}].$$

Beweis. Aus den Sätzen 1 und 2 folgt, dass jedem Eigenwert λ der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ ein gewisser Eigenwert μ^2 der Matrix B^2 entspricht (dieses gilt auch in der umgekehrten Richtung), wobei zwischen den Zahlen λ und μ^2 die Beziehung (8) besteht. Im Folgenden werden wir also die, den Eigenwerten μ^2 der Matrix B^2 entsprechende Wurzeln λ der Gleichung (8), untersuchen.

Die Gleichung (8) stellt eine quadratische Gleichung für λ dar, die im Allgemeinen zwei Wurzeln

$$(11) \quad \lambda_{1,2}(\mu^2) = \{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \mu^2 - 2\alpha_1\alpha_2(1 + \beta) \mu^2 + \\ + 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) \pm \sqrt{D(\mu^2)}\}/2\alpha_1^2\alpha_2^2$$

wo

$$(12) \quad D(\mu^2) = (\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \mu^2 \cdot \\ \cdot \{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \mu^2 - 4\alpha_1\alpha_2(1 + \beta) \mu^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)\}$$

besitzt. Für $\beta = -1$ folgt aus (11) und (12)

$$(13) \quad \lambda_{1,2}(\mu^2) = \{(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)^2 \mu^2 + 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) \pm \\ \pm \sqrt{D(\mu^2)}\}/2\alpha_1^2\alpha_2^2,$$

wo

$$(14) \quad D(\mu^2) = (\alpha_1 + \alpha_2 - 1)^4 \mu^4 + 4\mu^2(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)^2 \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)$$

ist.

Es sei $0 < \mu^2 < 1$ und es sei $D(\mu^2) \leq 0$. Die Gleichung (8) hat dann zwei komplex konjugierte Wurzeln, bzw. eine zweifache reelle Wurzel. Aus (13) und (14) folgt, dass

$$(15) \quad |\lambda(\mu^2)|^2 = (1 - 1/\alpha_1)^2 (1 - 1/\alpha_2)^2$$

unabhängig von μ^2 gilt.

In der Ebene α_1, α_2 suchen wir jetzt einen Bereich $\Omega(\mu^2)$, wo $D(\mu^2) \leq 0$ gilt. Die Grenze dieses Bereiches ist die Kurve deren Gleichung $D(\mu^2) = 0$ ist.

Nach (14) ist also

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - 1)^2 \mu^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) = 0$$

und nach einer Berechnung ergibt sich für α_2 die quadratische Gleichung

$$\alpha_2^2[\mu^2 + 4\alpha_1(\alpha_1 - 1)] + 2\alpha_2[\mu^2(\alpha_1 - 1) - 2\alpha_1(\alpha_1 - 1)] + \mu^2(\alpha_1 - 1)^2 = 0$$

mit den Wurzeln

$$(16) \quad \begin{aligned} \alpha_2^{(+)}(\mu^2) &= [-(\alpha_1 - 1)(\mu^2 - 2\alpha_1) + 2|\alpha_1 - 1||\alpha_1| \sqrt{(1 - \mu^2)}] : \\ &: [\mu^2 + 4\alpha_1(\alpha_1 - 1)], \\ \alpha_2^{(-)}(\mu^2) &= [-(\alpha_1 - 1)(\mu^2 - 2\alpha_1) - 2|\alpha_1 - 1||\alpha_1| \sqrt{(1 - \mu^2)}] : \\ &: [\mu^2 + 4\alpha_1(\alpha_1 - 1)]. \end{aligned}$$

Aus (16) folgt nach einer Umformung

$$(17) \quad \begin{aligned} \alpha_2^{(+)}(\mu^2) &= \frac{(\alpha_1 - 1)(1 + \sqrt{(1 - \mu^2)})}{2\alpha_1 - (1 + \sqrt{(1 - \mu^2)})} \quad \text{für } \alpha_1 \leq 0 \text{ und } \alpha_1 \geq 1, \\ \alpha_2^{(+)}(\mu^2) &= \frac{(\alpha_1 - 1)(1 - \sqrt{(1 - \mu^2)})}{2\alpha_1 - (1 - \sqrt{(1 - \mu^2)})} \quad \text{für } 0 \leq \alpha_1 < \\ &< \frac{1}{2}(1 - \sqrt{(1 - \mu^2)}) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(1 - \sqrt{(1 - \mu^2)}) < \alpha_1 \leq 1, \\ \alpha_2^{(-)}(\mu^2) &= \frac{(\alpha_1 - 1)(1 - \sqrt{(1 - \mu^2)})}{2\alpha_1 - (1 - \sqrt{(1 - \mu^2)})} \quad \text{für } \alpha_1 \leq 0 \text{ und } \alpha_1 \geq 1, \\ \alpha_2^{(-)}(\mu^2) &= \frac{(\alpha_1 - 1)(1 + \sqrt{(1 - \mu^2)})}{2\alpha_1 - (1 + \sqrt{(1 - \mu^2)})} \quad \text{für } 0 \leq \alpha_1 < \\ &< \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - \mu^2)}) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - \mu^2)}) < \alpha_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Definiere man die Funktionen $\alpha_2^{(1)}(\mu^2), \alpha_2^{(2)}(\mu^2)$ wie folgt:

$$(18) \quad \begin{aligned} \alpha_2^{(1)}(\mu^2) &= \frac{(\alpha_1 - 1)(1 + \sqrt{(1 - \mu^2)})}{2\alpha_1 - (1 + \sqrt{(1 - \mu^2)})} \quad \text{für } \alpha_1 \neq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - \mu^2)}), \\ \alpha_2^{(2)}(\mu^2) &= \frac{(\alpha_1 - 1)(1 - \sqrt{(1 - \mu^2)})}{2\alpha_1 - (1 - \sqrt{(1 - \mu^2)})} \quad \text{für } \alpha_1 \neq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{(1 - \mu^2)}). \end{aligned}$$

Der Graph der Funktion $\alpha_2^{(1)}(\mu^2)$, bzw. $\alpha_2^{(2)}(\mu^2)$ ist in Abb. 1 mit einer starken, bzw. feinen Linie gekennzeichnet. Die Graphen beider Funktionen gehen für jede Zahl μ^2 durch die Punkte $[0, 1]$ und $[1, 0]$. Der Graph der Funktion $\alpha_2^{(1)}(\mu^2)$, bzw.

$\alpha_2^2(\mu^2)$ hat die senkrechte Asymptote $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \mu^2})$ bzw. $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \mu^2})$ und die waagrechte Asymptote $\alpha_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \mu^2})$ bzw. $\alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \mu^2})$. Der Bereich $\Omega(\mu^2)$ ist in Abb. 1 schraffiert.

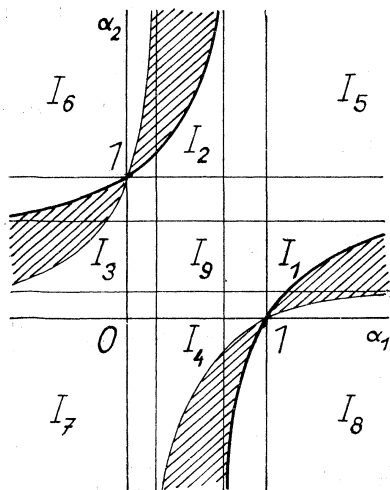


Abb. 1.

Es sei jetzt $m^2 \leq \mu^2 \leq M^2$ und $D(M^2) \leq 0$. Dann kann man leicht beweisen, dass $D(m^2) \leq D(\mu^2) \leq D(M^2)$ gilt und dass offensichtlich

$$\Omega(M^2) \subset \Omega(\mu^2) \subset \Omega(m^2)$$

ist. Der Beweis besteht aus einigen Teilen.

a) Es sei $[\alpha_1, \alpha_2] \in \Omega(M^2)$ und man suche die Zahl $\min_{[\alpha_1, \alpha_2] \in \Omega(M^2)} \max_{m^2 \leq \mu^2 \leq M^2} |\lambda(\mu^2)|$ für $m^2 \leq \mu^2 \leq M^2$. Es ist

$$(19) \quad \frac{\partial |\lambda(\mu^2)|^2}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)^2 \right] = 2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)^2 / \alpha_1^3 \alpha_2^2,$$

$$\frac{\partial |\lambda(\mu^2)|^2}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)^2 \right] = 2(\alpha_1 - 1)^2 (\alpha_2 - 1) / \alpha_1^2 \alpha_2^3.$$

Aus Abb. 1 ist klar, dass der Bereich $\Omega(M^2)$ aus vier, in den Intervallen $I_1 = (1, \infty) \times (0, 1)$, $I_2 = (0, 1) \times (1, \infty)$, $I_3 = (-\infty, 0) \times (0, 1)$, $I_4 = (0, 1) \times (-\infty, 1)$ liegenden Teilen, besteht. Aus dem Vorzeichen des Ableitungen (19) in den einzelnen Intervallen folgt, dass der Minimalwert des Ausdruckes $|\lambda(\mu^2)|^2$ an der Grenzlinie $\alpha_2^{(1)}(M^2)$ des Bereiches $\Omega(M^2)$ liegen muss. (Die Punkte $[\alpha_1, \alpha_2] = [0, 1]$ und $[\alpha_1, \alpha_2] = [1, 0]$ and der Linie $\alpha_2^{(1)}(M^2)$ kommen als Parameterwerte nicht in Betracht, da sonst nach dem bewiesenen Hilfssatz angesichts $\beta = -1$ die Matrix $I - S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ singulär wäre.)

Durch Einsetzung in (15) kann man leicht feststellen, dass für die Punkte der Linie $\alpha_2^{(1)}(M^2)$ mit $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$, $\alpha_1 \neq 1$, der Ausdruck $|\lambda(\mu^2)|^2$ einen konstanten, von μ^2 nicht abhängigen, Wert hat und es gilt

$$|\lambda(\mu^2)|^2 = [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]^2 / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]^2,$$

so dass

$$\begin{aligned} \min_{[\alpha_1, \alpha_2] \in \Omega(M^2)} \max_{m^2 \leq \mu^2 \leq M^2} |\lambda(\mu^2)| &= \min_{[\alpha_1, \alpha_2] \in \Omega(M^2)} |\lambda(\mu^2)| = \\ &= [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}] \end{aligned}$$

für einen beliebigen Parameterwert α_1 mit Ausnahme $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$, $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = (\alpha_1 - 1)(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) / [2\alpha_1 - (1 + \sqrt{(1 - M^2)})]$ gilt (siehe (9)).

b) Es sei $[\alpha_1, \alpha_2] \notin \Omega(M^2)$ und $[\alpha_1, \alpha_2] \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$. Man untersuche zuerst den Fall, wenn $[\alpha_1, \alpha_2] \in I_1$ und $\alpha_2 > \alpha_2^{(1)}(M^2)$ gilt. Man kann leicht feststellen, dass eine solche Zahl μ^2 ($0 < \mu^2 < M^2$) existiert, für die $\alpha_2 = \alpha_2^{(1)}(\mu^2)$ gilt. An der Linie $\alpha_2^{(1)}(\mu^2)$ sind dann die, der Zahl M^2 entsprechende Wurzeln der Gleichung (8), reell. Aus (13) und (14) folgt für die Wurzel mit dem Vorzeichen (+) und für $\alpha_2 = \alpha_2^{(1)}(\mu^2)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \lambda(M^2) &= [2M^2 - \mu^2 + 2\sqrt{(M^4 - M^2\mu^2)}] / (1 - \sqrt{(1 - \mu^2)})^2 > \\ &> [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]. \end{aligned}$$

Man untersuche den Fall, wenn $[\alpha_1, \alpha_2] \in I_1$ und $\alpha_2 < \alpha_2^{(2)}(M^2)$ gilt. Dann existiert soeine Zahl μ^2 ($0 < \mu^2 < M^2$), dass $\alpha_2 = \alpha_2^{(2)}(\mu^2)$ ist. Für die Wurzel $\lambda(M^2)$ der Gleichung (8) mit dem Vorzeichen (+) und für $\alpha_2 = \alpha_2^{(2)}(\mu^2)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda(M^2) &= [2M^2 - \mu^2 + 2\sqrt{(M^4 - M^2\mu^2)}] / (1 - \sqrt{(1 - \mu^2)})^2 > \\ &> [2M^2 - \mu^2 + 2\sqrt{(M^4 - M^2\mu^2)}] / (1 + \sqrt{(1 - \mu^2)})^2 > \\ &> [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]. \end{aligned}$$

Analogisch kann man beweisen, dass auch für die Bereiche $I_2 - \Omega(M^2)$, $I_3 - \Omega(M^2)$, $I_4 - \Omega(M^2)$ eine solche reelle Wurzel der Gleichung (8) existiert, die für alle Punkte dieser Bereiche grösser als $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ ist.

Dadurch ist bewiesen, dass im Bereich $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ der Spektralradius der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, -1)$ and der Linie $\alpha_2 = \alpha_2^{(1)}(M^2)$ seinen Minimalwert $[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ annimmt.

c) Wir beweisen jetzt, dass in den Intervallen $I_5 = (1, \infty) \times (1, \infty)$, $I_6 = (-\infty, 0) \times (1, \infty)$, $I_7 = (-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$, $I_8 = (1, \infty) \times (-\infty, 0)$, $I_9 = (0, 1) \times (0, 1)$ (siehe Abb. 1) die Ungleichungen $\lambda_1(M^2) \geq M^2 > [1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gelten. Wir beweisen zuerst leicht, dass $A = 1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 - 1/\alpha_1\alpha_2 < 1$ für jeden Punkt $[\alpha_1, \alpha_2] \in \bigcup_{j=5}^9 I_j$ gilt. Es sei $[\alpha_1, \alpha_2] \in I_5$. Wenn $A \geq 1$, d.h. $1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 - 1/\alpha_1\alpha_2 \geq 1$ gelte, wäre angesichts $\alpha_1 + \alpha_2 -$

$-1 \geq \alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ und $\alpha_2(1 - \alpha_1) \geq 1 - \alpha_1$, $\alpha_2 \leq 1$, was ein Widerspruch ist. Ähnlicherweise kann man den Beweis in den Intervallen I_6 bis I_9 durchführen.

Man schreibe jetzt die Wurzel $\lambda_1(M^2)$ in der Form

$$\lambda_1(M^2) = \frac{1}{2}A^2M^2 + 1 - A + \sqrt{(\frac{1}{4}A^4M^4 - M^2A^3 + M^2A^2)}.$$

Wir beweisen, dass für jeden Punkt $[\alpha_1, \alpha_2] \in \bigcup_{j=5}^9 I_j$ die Ungleichung $\lambda_1(M^2) \geq M^2$, d.h. die Ungleichung

$$(20) \quad \sqrt{(\frac{1}{4}A^4M^4 - M^2A^3 + M^2A^2)} \geq -\frac{1}{2}A^2M^2 + A - (1 - M^2)$$

gilt. Es ist leicht zu beweisen, dass folgende Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}A^2M^2 + A - (1 - M^2) \leq 0 \quad \text{für} \\ & A \leq [1 - \sqrt{(1 - 2M^2(1 - M^2))}] / M^2, \\ & -\frac{1}{2}A^2M^2 + A - (1 - M^2) > 0 \quad \text{für } [1 - \sqrt{(1 - 2M^2(1 - M^2))}] : \\ & : M^2 < A < 1, \end{aligned}$$

$$(21) \quad (1 - M^2)/(1 + M^2) < [1 - \sqrt{(1 - 2M^2(1 - M^2))}] / M^2.$$

Für $A \leq [1 - \sqrt{(1 - 2M^2(1 - M^2))}] / M^2$ ist also die rechte Seite der Ungleichung (20) nichtpositiv, so dass die Ungleichung gilt. Für $[1 - \sqrt{(1 - 2M^2(1 - M^2))}] / M^2 < A < 1$ ist die rechte Seite der Ungleichung (20) positiv und nach der Umformung bekommt man aus (20) die Ungleichung

$$(1 - M^2)/(1 + M^2) < A,$$

die mit Rücksicht auf die Ungleichung (21) gilt.

d) Es bleibt die Punkte an den Grenzgeraden der Gebieten I_1 bis I_9 , d.h. an den Geraden $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = 1$ zu untersuchen. Die Geraden $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ kommen nicht in Betracht, da nach der Voraussetzung $\alpha_1 \neq 0$ und $\alpha_2 \neq 0$ ist. Wenn ferner z. B. $\alpha_1 = 1$ ist, folgt nach (13) und (14) für die Wurzel mit dem Vorzeichen (+) und für $\mu^2 = M^2$ die Beziehung $\lambda(M^2) = M^2 > [1 - (1 - M^2)] : [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$. Der Fall $\alpha_2 = 1$ kann ähnlich behandelt werden.

Wenn die Matrix B singular ist, d.h. wenn $\mu = 0$ ist, folgt aus (13) und (14) $\lambda(0) = (1 - 1/\alpha_1)(1 - 1/\alpha_2)$, so dass im Punkt $[\alpha_1^0, \alpha_2^0]$ (siehe (9)) $\lambda(0) = -[1 - \sqrt{(1 - M^2)}] / [1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$ gilt.

Dadurch ist der Satz 3 bewiesen.

Jetzt wenden wir uns zu dem Fall, wenn $\beta = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ gilt. Es gilt folgender Satz:

Satz 4. *Es sei $\beta \neq -1$, $\beta = -(\alpha_1 + \alpha_2)$. Dann gilt für jedes Paar von Parametern α_1^0, α_2^0*

$$(22) \quad \begin{aligned} \alpha_1^0 & \neq 1 - \frac{1}{2}(m^2 + M^2), \quad \alpha_1^0 \neq 0, \quad \alpha_1^0 \neq 1, \\ \alpha_2^0 & = (\alpha_1^0 - 1)(2 - m^2 - M^2) / [2\alpha_1^0 - (2 - m^2 - M^2)] \end{aligned}$$

die Beziehung

$$(23) \quad \min_{[\alpha_1, \alpha_2]} \varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2))) = \varrho(S(\alpha_1^0, \alpha_2^0, -(\alpha_1^0 + \alpha_2^0))) = \\ = (M^2 - m^2)/(2 - m^2 - M^2).$$

Beweis. Es folgt aus den Beziehungen (11), (12) und $\beta = -(\alpha_1 + \alpha_2)$, dass für jede μ^2 $D(\mu^2) = 0$ ist, so dass nur reelle Wurzeln der Gleichung (8) der Form

$$(24) \quad \lambda(\mu^2) = \{-2\alpha_1\alpha_2(1 - \alpha_1 - \alpha_2)\mu^2 + 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)\}/2\alpha_1^2\alpha_2^2$$

existieren.

Bezeichnet man wieder $A = 1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 - 1/\alpha_1\alpha_2$, bekommt man nach der Umformung der letzten Beziehung

$$(25) \quad \lambda(\mu^2) = 1 - A(1 - \mu^2).$$

Angesichts der Tatsache, dass für $[\alpha_1, \alpha_2] \in I_j$, $j = 5, 6, 7, 8, 9$, $A < 1$ ist, gilt

$$\lambda(M^2) = 1 - A(1 - M^2) > M^2 > (M^2 - m^2)/[2 - (m^2 + M^2)].$$

Man untersuche jetzt die Punkte $[\alpha_1, \alpha_2] \in I_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Hier gilt die Ungleichung $A < 1$, wovon man leicht beweisen kann, dass für $0 < \mu_1^2 < \mu_2^2$ die Ungleichungen $\lambda(\mu_1^2) < \lambda(\mu_2^2)$, $\lambda(M^2) > 0$ gelten. Es ist klar, dass der Ausdruck $|\lambda(\mu^2)|$ angesichts α_1, α_2 seinen Minimalwert im Punkt $[\alpha_1^0, \alpha_2^0]$ annimmt, in dem

$$-1 + A(1 - m^2) = 1 - A(1 - M^2)$$

gilt, wovon nach einer Umformung

$$(26) \quad \alpha_2 = (\alpha_1 - 1)(2 - m^2 - M^2)/[2\alpha_1 - (2 - m^2 - M^2)]$$

folgt. Für $\alpha_1 = 1 - \frac{1}{2}(m^2 + M^2)$ existiert die entsprechende Zahl α_2 nicht. Für $\alpha_1 \neq 1 - \frac{1}{2}(m^2 + M^2)$ bekommt man also infolge (26), (24) nach einer Umformung die Beziehung

$$0 \leq \lambda(M^2) = (M^2 - m^3)/(2 - m^2 - M^2)$$

(siehe (23)).

Es bleibt die Grenzpunkte der Bereiche I_1, \dots, I_9 , d. h. die Geraden $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ zu untersuchen. Die Geraden $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ kommen nach der Voraussetzung nicht in Betracht. Im Falle $\alpha_1 = 1$, bzw. $\alpha_2 = 1$ folgt aus (24) für $\mu^2 = M^2$ die Beziehung $\lambda(M^2) = M^2 > (M^2 - m^2)/(2 - m^2 - M^2)$.

Dadurch ist der Satz 4 bewiesen.

Zum Schluss kann man die optimale Spektralradien der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ für $\beta = -1$ und für $\beta = -(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 1$ vergleichen. Es gilt

$$0 \leq (M^2 - m^2)/(2 - m^2 - M^2) \leq [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]$$

für $1 - \sqrt{(1 - M^2)} \leq m^2$ und

$$\frac{[1 - \sqrt{(1 - M^2)}]}{[1 + \sqrt{(1 - M^2)}]} < \frac{(M^2 - m^2)}{(2 - m^2 - M^2)} < M^2$$

für $m^2 < 1 - \sqrt{(1 - M^2)}$.

Literaturverzeichnis

- [1] *D. M. Young*: Iterative Solution of large Systems. Academic Press, 1971.
- [2] *M. Šisler*: Über ein mehrparametriges Iterationsverfahren für lineare algebraische Gleichungssysteme. Apl. mat. 35 (1990), 337–349.

Souhrn

O KONVERGENCI JISTÉ SYMETRICKÉ ITERAČNÍ METODY PRO SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

MIROSLAV ŠISLER

V práci je studována jistá symetrická iterační metoda pro řešení soustavy rovnic tvaru $x = Bx + b$, kde B je slabě dvojcyklická matice, závislá na třech parametrech. Je zkoumána optimální konvergence této metody ve dvou případech, lišících se volbou parametrů.

Anschrift des Verfassers: RNDr. Miroslav Šisler, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.