Applications of Mathematics

Miroslav Šisler

Über die Konvergenzoptimierung eines symmetrischen Iterationsverfahrens

Applications of Mathematics, Vol. 36 (1991), No. 1, 21--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104441

ÜBER DIE KONVERGENZOPTIMIERUNG EINES SYMMETRISCHEN ITERATIONSVERFAHRENS

Miroslav Šisler

(Angegangen an 20. 6. 1989)

Zusammenfassung. In der Arbeit wird ein gewisses symmetrisches Iterationsverfahren für die Lösung des linearen algebraischen Gleichungssystems der Form $x = Bx + b$ mit einer schwach zweizyklischen Matrix untersucht. Die untersuchte Methode hängt von 3 reellen Parametern ab. In der Arbeit wird die Frage der optimalen Parameterwahl vom Gesichtspunkt der Konvergenzgeschwindigkeit gelöst.

Keywords: linear system, iterative method, weakly cyclic matrix, convergence

AMS Classification: 65F10

Die Arbeit, ebenso wie die Arbeit [2], befasst sich mit einem symmetrischen Iterationsverfahren für die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Form

$$x = Bx + b\,,$$

wo B eine schwach zweizyklische Blockmatrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} O, & U \\ L, & O \end{pmatrix}$$

ist (die diagonalen Nullmatrizen sind quadratisch). Das Iterationsverfahren wird durch die Formel

$$x_{\nu+1} = S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, x_\nu + L(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\, b_U + b_L$$

definiert; hier sind $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, β reelle Parameter und es gilt

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \quad U(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\,,$$

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_1 - 1) I, & U \\ (\beta + 1) L, & (\alpha_2 - 1) I \end{pmatrix},$$

$$b_L = \begin{pmatrix} \alpha_1 I, & O \\ \beta L, & \alpha_2 I \end{pmatrix}^{-1} b\,,$$

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha_2 I, & \beta U \\ O, & \alpha_1 I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\alpha_2 - 1) I, & (\beta + 1) U \\ L, & (\alpha_1 - 1) I \end{pmatrix},$$

$$b_U = \begin{pmatrix} \alpha_2 I, & \beta U \\ O, & \alpha_1 I \end{pmatrix}^{-1} b .$$

Ebenso, wie in [2] setzen wir voraus, dass $I - B$ eine nichtsinguläre Matrix ist und dass die Matrix B^2 nichtnegative Eigenwerte μ_i^2 besitzt, wobei $0 \leqq m^2 \leqq \mu_i^2 \leqq \leqq M^2 < 1$ gilt. Wir werden uns mit der optimalen Wahl der Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ vom Gesichtspunkt der Optimierung des Spektralradius $\varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta))$ der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ befassen. In dem Satz 3 von [2] wurde diese Frage für den speziellen Fall $\beta = -1$ gelöst.

Wir beweisen folgenden Satz:

Satz. *A. Es sei $1 - m^2 < \sqrt{(1 - M^2)}$. Dann erreicht $\varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta))$ seinen Minimalwert für jede drei Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \beta$, für die die Beziehungen*

(1) $$(1 - 1/\alpha_1)(1 - 1/\alpha_2) = (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2),$$

(2) $$\beta = -(\alpha_1 + \alpha_2)$$

gelten; dabei ist

(3) $$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \beta} \varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)) = (M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)] .$$

B. Es sei $1 - m^2 \geqq \sqrt{(1 - M^2)}$. Dann ist

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \beta} \varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)) = [1 - \sqrt{(1 - M^2)}]/[1 + \sqrt{(1 - M^2)}],$$

wo die Parameterwerte $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ durch den Satz 3 der Arbeit [2] gegeben sind.

Der Beweis des Satzes. Aus den Sätzen 1 und 2 in [2] folgt, dass die Eigenwerte λ der Matrix $S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ genau alle Wurzeln λ der Gleichungen

(4) $$(a\mu_i^2 - c)(f\mu_i^2 - c) - b\mu_i^2(d\mu_i^2 + e) = 0$$

sind, wobei μ_i^2 die Eigenwerte der Matrix B^2 sind und

$$\begin{aligned}
a &= \alpha_2(\beta + \alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2(1 + \beta), \\
b &= \alpha_2(\alpha_1 - 1)(\beta + \alpha_1 + \alpha_2), \\
c &= \lambda\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1), \\
d &= -\beta(\beta + \alpha_1 + \alpha_2), \\
e &= \alpha_1(\alpha_2 - 1)(\beta + \alpha_1 + \alpha_2), \\
f &= (\beta + \alpha_1)(\beta + \alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2(1 + \beta)
\end{aligned}$$

gilt. Die Gleichung (4) ist eine quadratische Gleichung, die bei gegebenen Werten $\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta$ im Allgemeinen zwei Wurzeln

$$(5) \qquad \lambda_1(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \mu_i^2 - 2\alpha_1\alpha_2(1 + \beta)\mu_i^2 + + 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) - \sqrt{(D(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta))}\}/2\alpha_1^2\alpha_2^2 ,$$

$$(6) \qquad \lambda_2(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \mu_i^2 - 2\alpha_1\alpha_2(1 + \beta)\mu_i^2 + + 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) + \sqrt{(D(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta))}\}/2\alpha_1^2\alpha_2^2$$

besitzt; dabei gilt

$$(7) \qquad D(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \frac{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2}{2\alpha_1^2\alpha_2^2} \cdot \left\{\frac{(\beta + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \mu_i^2 - 4\alpha_1\alpha_2(1 + \beta)\mu_i^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)}{2\alpha_1^2\alpha_2^2}\right\} .$$

Man definiere jetzt die Zahlen A, B durch die Formeln

$$(8) \qquad A = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)/\alpha_1\alpha_2 = (1 - 1/\alpha_1)(1 - 1/\alpha_2) , \quad B = (\beta + 1)/\alpha_1\alpha_2 .$$

Man bezeichne ferner

$$\lambda_1(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \lambda_1(\mu_i^2, A, B) , \quad \lambda_2(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = \lambda_2(\mu_i^2, A, B) ,$$
$$D(\mu_i^2, \alpha_1, \alpha_2, \beta) = D(\mu_i^2, A, B) , \quad \varrho(S(\alpha_1, \alpha_2, \beta)) = \varrho(S(A, B)) .$$

Aus den Formeln (5), (6), (7) folgen dann die Formeln

$$(9) \qquad \lambda_1(\mu_i^2, A, B) = \tfrac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 - B\mu_i^2 + A - \sqrt{(D(\mu_i^2, A, B))} ,$$

$$(10) \qquad \lambda_2(\mu_i^2, A, B) = \tfrac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 - B\mu_i^2 + A + \sqrt{(D(\mu_i^2, A, B))} ,$$

$$(11) \qquad D(\mu_i^2, A, B) = \tfrac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 \{\tfrac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 - 2B\mu_i^2 + 2A\} .$$

Es sei jetzt A eine gegebene Zahl und μ_i^2 sei einer der Eigenwerte der Matrix B^2. Dann bildet λ_1, λ_2 ein Paar komplex konjugierter Wurzeln, oder ist $\lambda_1 = \lambda_2$, insofern

$$(12) \qquad D(\mu_i^2, A, B) \leqq 0$$

gilt. Da $\frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 \geqq 0$ ist, gilt die Ungleichung (12) genau dann, wenn $\frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1)^2 = 0$ oder $\frac{1}{2}\mu_i^2(B - A + 1) > 0$ ist und zugleich

$$(13) \qquad \mu_i^2B^2 + B[2\mu_i^2(1 - A) - 4\mu_i^2] + \mu_i^2(1 - A)^2 + 4A \leqq 0$$

gilt. Solange $A \leqq 0$ gilt, ist die Ungleichung (13) für jedes B von dem Intervall

$$(14) \qquad B_{1\mu_i^2} \leqq B \leqq B_{2\mu_i^2}$$

erfüllt, wo

$$(15) \qquad B_{1\mu_i^2} = 1 + A - 2\sqrt{(A(1 - 1/\mu_i^2))} ,$$

$$(16) \qquad B_{2\mu_i^2} = 1 + A + 2\sqrt{(A(1 - 1/\mu_i^2))}$$

gilt. Für $A > 0$ und beliebige Zahlen B, μ_i^2 sind offensichtlich die Wurzeln $\lambda_1(\mu_i^2, A, B)$, $\lambda_2(\mu_i^2, A, B)$ reell.

Man betrachte jetzt den Fall

$$B - A + 1 = 0\,, \tag{17}$$

d. h. $B = A - 1$. Dann ist nach (9), (10), (11)

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mu_i^2, A, B) = \lambda_2(\mu_i^2, A, B) = -B\mu_i^2 + A = (1 - A)\,\mu_i^2 + A = \\ A(1 - \mu_i^2) + \mu_i^2\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Der Graph der Funktion $(1 - \mu_i^2)\,A + \mu_i^2$ ist eine Gerade mit einem positiven Richtungskoeffizient $1 - \mu_i^2$ (da $0 \leqq m^2 \leqq \mu_i^2 \leqq M^2 < 1$ gilt) und für $A = 1$ gilt immer $(1 - \mu_i^2)\,A + \mu_i^2 = 1$. Für $A < 1$ gilt ferner

$$(1 - m^2)\,A + m^2 \leqq (1 - \mu_i^2)\,A + \mu_i^2 \leqq (1 - M^2)\,A + M^2\,,$$

wobei $|\lambda_1(m^2, A, B)| = |\lambda_1(M^2, A, B)|$ ist, wenn

$$-\,[(1 - m^2)\,A + m^2] = (1 - M^2)\,A + M^2\,,$$

d. h.

$$A = (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2) \tag{19}$$

gilt. Für B gilt dann angesichts (17)

$$B = 2/(M^2 + m^2 - 2)\,. \tag{20}$$

Angesichts (17), (18), (19) und (20) ist

$$\begin{aligned}&\lambda_1(M^2, (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2)\,,\;\; 2/(M^2 + m^2 - 2)) = \\ &= [(1 - M^2)\,(M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2)] + M^2 = \\ &= (M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)]\,,\end{aligned}$$

so dass $\min\limits_{A, B = A - 1} \varrho(S(A, B)) = (M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)]$ gilt.

Es sei jetzt $B - A + 1 \neq 0$. Wir unterscheiden einige Fälle.

I. Der Fall $A > 0$. In diesem Fall sind die Wurzeln $\lambda_1(\mu_i^2, A, B)$, $\lambda_2(\mu_i^2, A, B)$ für jede μ_i^2 reell, wobei $\frac{1}{2}\mu_i^2(B - A - 1)^2 - B\mu_i^2 + A \geqq 0$ ist. Es gilt also nach (8) und (10) $\lambda_2(\mu_i^2, A, B) \geqq 0$ und $|\lambda_1(\mu_i^2, A, B)| \leqq \lambda_2(\mu_i^2, A, B)$. Wir beweisen jetzt, dass $\lambda_2(M^2, A, B) \geqq M^2$ für jedes B gilt. Diese Ungleichung ist der Ungleichung

$$\sqrt{(D(M^2, A, B))} \geqq M^2 - \tfrac{1}{2}M^2(B - A + 1)^2 + BM^2 - A \tag{22}$$

äquivalent. Wenn die rechte Seite der Ungleichung (22) nichtpositiv ist, gilt diese Ungleichung automatisch. Wenn

$$M^2 - \tfrac{1}{2}M^2(B - A + 1)^2 + BM^2 - A > 0 \tag{23}$$

ist, bekommen wir nach Potenzierung und Umformung der Ungleichung (22) die Ungleichung

(24) $$A(1 + M^2) < 2M^2(B + 1) \, .$$

Aus (23) folgt unmittelbar die Ungleichung

$$2A \leqq 2M^2(1 + B) - \tfrac{1}{2}M^2(B + 1 - A)^2$$

wovon (24) folgt. Es ist also

$$\varrho(S(A, B)) \geqq M^2$$

für jedes B und $A > 0$.

II. Es sei $A = 0$. Dann gilt für eine beliebige Zahl B

$$\lambda_1(M^2, 0, B) = \tfrac{1}{2}M^2(B + 1)^2 - BM^2 -$$
$$- \sqrt{(\tfrac{1}{2}M^2(B + 1)^2 \{\tfrac{1}{2}M^2(B + 1)^2 - 2BM^2)\})} = M^2 \, ,$$

$$\lambda_2(M^2, 0, \mathrm{B}) = \tfrac{1}{2}M^2(B + 1)^2 - BM^2 +$$
$$+ \sqrt{(\tfrac{1}{2}M^2(B + 1)^2 \{\tfrac{1}{2}M^2(B + 1)^2 - 2BM^2)\})} = B^2M^2 \, .$$

Für $A = 0$ und eine beliebige B ist also wieder

$$\varrho(S(0, B)) \geqq M^2 \, .$$

III. Wir befassen uns mit dem wichtigsten Fall $A < 0$. Es sei μ_i^2 ein beliebiger Eigenwert der Matrix B^2 und die Zahl B liege im Intervall (14). Dann sind die Wurzeln $\lambda_1(\mu_i^2, A, B)$, $\lambda_2(\mu_i^2, A, B)$ komplex konjugiert oder identisch und es gilt

$$|\lambda_1(\mu_i^2, A, B)| = |\lambda_2(\mu_i^2, A, B)| = (B\mu_i^2 - A)^2 \, .$$

Der Graph der Funktion $B\mu_i^2 - A$ der Veränderlichen B ist eine Gerade mit dem Richtungskoeffizient μ_i^2, wobei für $B = 0$ $B\mu_i^2 - A = -A$ und für $B = A/\mu_i^2$ $B\mu_i^2 - A = 0$ ist. Es gilt ferner $A/\mu_i^2 \leqq B_{1\mu_i^2}$, da diese Ungleichung mit den Ungleichungen $A/\mu_i^2 \leqq A + 1 - 2\sqrt{(A(1 - 1/\mu_i^2))}$, $0 \leqq [1 - A(1 - 1/\mu_i^2)]^2$ äquivalent ist. Es ist also für B aus dem Intervall (14) $B\mu_i^2 - A \geqq 0$ und es gilt

(25) $$A(\mu_i^2, A, B) = |\lambda_1(\mu_i^2, A, B)| = |\lambda_2(\mu_i^2, A, B)| = B\mu_i^2 - A \, .$$

a) Setzen wir nun voraus, dass

(26) $$-(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \leqq A < 0$$

und

(27) $$B \geqq B_{2M^2}$$

gilt. Es ist leicht zu beweisen, dass eine solche Zahl μ^2 existiert, dass $0 < \mu^2 < M^2$ und $B = B_{2\mu^2} = A + 1 + 2\sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}$ ist. Dann gilt

$$\lambda_2(M^2, A, B) = \lambda_2(M^2, A, B_{2\mu^2}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}M^2(B_{2\mu^2} - A + 1)^2 - B_{2\mu^2}M^2 + \sqrt{(D(M^2, A, B_{2\mu^2}))} =$$
$$= [\sqrt{M^2}\,(1 + \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}) + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2 \geqq M^2$$

für jede $A < 0$ (und auch für (26)). Es gilt also für jede A aus dem Intervall (26) und B aus dem Intervall (27)

$$\varrho(S(A, B)) \geqq M^2 .$$

b) Man setze voraus, dass A im Intervall (26) und B im Intervall

(28) $$B_{1M^2} \leqq B \leqq B_{2M^2}$$

liegen. Aus der Ungleichung (26) folgt sofort, dass $0 \leqq B_{1M^2}$ ist. Für eine nichtnegative Zahl B gilt aber nach (25)

$$\Lambda(\mu_i^2, A, B) = B\mu_i^2 - A \leqq BM^2 - A = \Lambda(M^2, A, B) =$$
$$= |\lambda_2(M^2, A, B)|$$

und es gilt ferner

$$\min_{B_{1M^2} \leqq B \leqq B_{2M^2}} |\lambda_2(M^2, A, B)| = B_{1M^2}M^2 - A =$$
$$= M^2(1 - \sqrt{A(1 - 1/M^2)})^2 \geqq$$
$$\geqq M^2 \left(1 - \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}\right)\left(\frac{1}{M^2} - 1\right)}\right)^2 =$$
$$= M^2 \left(1 - \frac{\sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}\right) = \frac{1 - \sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}} .$$

Im Fall (26) und (28) gilt also

$$\varrho(S(A, B)) \geqq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) .$$

c) Setzen wir (26) und

(29) $$B \leqq B_{1M^2}$$

voraus. Ähnlicherweise, wie im Fall a) existiert eine solche Zahl μ^2, $\mu^2 \leqq M^2$, dass $B = B_{1\mu^2} = A + 1 - 2\sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}$ gilt. Für (29) gilt dann

$$\lambda_2(M^2, A, B) = \lambda_2(M^2, A, B_{1\mu^2}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}M^2(B_{1\mu^2} - A + 1)^2 - B_{1\mu^2}M^2 + A + \sqrt{(D(M^2, A, B_{1\mu^2}))} =$$
$$= [\pm \sqrt{M^2}\,(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}) + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2 ,$$

wobei das Vorzeichen $(+)$, bzw. $(-)$ im Fall $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} \geqq 0$ bzw. $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} < 0$. gilt. Es ist also

$$\lambda_2(M^2, A, B) = [-\sqrt{M^2}(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2$$

für $\mu^2 < A/(A - 1)$ und

$$\lambda_2(M^2, A, B) = [\sqrt{M^2}(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2)))} + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2$$

für $A/(A - 1) \leqq \mu^2 \leqq M^2$. Durch Differenzierung der Funktion $\lambda_2(M^2, A, B)$ nach μ^2 stellt man fest, dass die Funktion $\lambda_2(M^2, A, B)$ abnehmend für alle $\mu^2 \leqq M^2$ ist. Es ist also

$$\min_{B \leqq B_{1\mu^2}} \lambda_2(M^2, A, B) = \lambda_2(M^2, A, B_{1M^2}) =$$

$$= [\sqrt{M^2}(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2)))}]^2 =$$

$$= M^2 \left(1 - \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}} \frac{1 - M^2}{M^2}\right)}\right)^2 = \frac{1 - \sqrt{(1 - M^2)}}{1 + \sqrt{(1 - M^2)}}.$$

Dadurch ist bewiesen, dass auch im Fall c)

$$\varrho(S(A, B)) \geqq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$$

gilt.

Eine ähnliche Analyse führen wir nun auch in dem Fall durch, wenn A im Intervall

$$A \leqq -(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \tag{30}$$

liegt.

d) Es gelte zuerst (30) und (27). Im Fall a) wurde bewiesen, dass die Ungleichung

$$\lambda_2(M^2, A, B) \geqq M^2 \geqq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$$

für jede negative Zahl A und also auch für (30) gilt. Es gilt also im Fall d)

$$\varrho(S(A, B)) \geqq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) .$$

e) Es gelte ferner (30) und (28). Aus (30) folgt sofort, dass $B_{1M^2} < 0$ ist. Falls $0 \leqq B \leqq B_{2M^2}$ ist, ist $\Lambda(M^2, A, B) \geqq -A = (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$, so dass für (30) und $0 \leqq B \leqq B_{2M^2}$ die Ungleichung $\varrho(S(A, B)) \geqq (1 - \sqrt{(1 - M^2)}) : : (1 + \sqrt{(1 - M^2)})$ gilt.

Es sei $B_{1M^2} \leqq B \leqq 0$. Dann ist

$$\Lambda(\mu_i^2, A, B) = B\mu_i^2 - A \leqq Bm^2 - A = \Lambda(m^2, A, B) = |\lambda_2(m^2, A, B)| ,$$

so dass

$$\min_{B_{1M^2} \leqq B \leqq 0} |\lambda_2(m^2, A, B)| = \min_{B_{1M^2} \leqq B \leqq 0} Bm^2 - A = B_{1M^2}m^2 - A =$$

$$= [A + 1 - 2\sqrt{(A(1 - 1/M^2))}]\, m^2 - A = \tag{31}$$

$$= A(m^2 - 1) - 2m^2 \sqrt{(A(1 - 1/M^2))} + m^2$$

gilt. Es gilt ferner

$$(32)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}A}\left[A(m^2 - 1) - 2m^2 \sqrt{(A(1 - 1/M^2))} + m^2\right] =$$
$$= (m^2 - 1)\sqrt{(A(1 - 1/M^2))} - m^2(1 - 1/M^2)\,.$$

Man kann leicht beweisen, dass für

$$(33)\qquad 1 - m^2 > \sqrt{(1 - M^2)}$$

die Ableitung im Intervall (30) negativ ist, so dass der Ausdruck (31) seinen Minimalwert für

$$A_1 = -(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$$

annimmt. Nach der Einsetzung von A_1 in (31) bekommt man nach einer Umformung

$$A(m^2 - 1) - 2m^2 \sqrt{(A(1 - 1/M^2))} + m^2 =$$
$$= (1 - \sqrt{(1 - M^2)})(1 - m^2)/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) -$$
$$- 2m^2 \sqrt{(1 - M^2)}/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) + m^2 =$$
$$= (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\,.$$

Für (33), (30) und $B_{1M^2} \leqq B \leqq 0$ gilt also wieder

$$\varrho(S(A, B)) \geqq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})\,.$$

Im Fall

$$(34)\qquad 1 - m^2 \leqq \sqrt{(1 - M^2)}$$

ist die Ableitung (32) negativ für $A < -m^4(1 - M^2)/M^2(1 - m^2)^2$, positiv für $-m^4(1 - M^2)/M^2(1 - m^2)^2 < A \leqq A_2$ und gleich Null für $A = -m^4(1 - M^2) : : M^2(1 - m^2)^2$. Der Ausdruck (31) nimmt also im Intervall (30) seinen Minimalwert für

$$(35)\qquad A = -m^4(1 - M^2)/M^2(1 - m^2)^2$$

an. Durch Einsetzung von (35) in (31) bekommt man schrittweise

$$(36)\qquad A(m^2 - 1) - 2m^2 \sqrt{(A(1 - 1/M^2))} + m^2 =$$
$$= [m^4(1 - M^2)/M^2(1 - m^2)] -$$
$$- [2m^2 \sqrt{(m^4(1 - M^2))}/\sqrt{(M^4(1 - m^2)^2)}] + m^2 =$$
$$= m^2(M^2 - m^2)/M^2(1 - m^2)\,.$$

Man kann leicht beweisen, dass für (34)

$$m^2(M^2 - m^2)/M^2(1 - m^2) \leqq (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$$

gilt. Für (34), (30) und $B_{1M^2} \leqq B \leqq 0$ gilt also

$$\varrho(S(A, B)) \geqq m^2(M^2 - m^2)/M^2(1 - m^2)\,.$$

f) Nun behandeln wir den Fall, wenn (30) und

$$(37) \qquad B_{1m^2} \leqq B \leqq B_{1M^2}$$

gilt. Man kann leicht beweisen, dass eine solche Zahl μ^2, $m^2 \leqq \mu^2 \leqq M^2$ existiert, dass $B = B_{1\mu^2} = A + 1 - 2\sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}$ gilt. Man bezeichne

$$(38) \qquad L(\mu_i^2, A, B) = \max\left(|\lambda_1(\mu_i^2, A, B)|, |\lambda_2(\mu_i^2, A, B)|\right).$$

Falls $B = B_{1\mu^2}$, $\mu^2 \leqq \mu_i^2$, sind die Wurzeln $\lambda_1(\mu_i^2, A, B)$, $\lambda_2(\mu_i^2, A, B)$ reell und es gilt

$$(39) \qquad L(\mu_i^2, A, B) = [\pm \sqrt{\mu_i^2}\,(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}) + \sqrt{(A(1 - \mu_i^2/\mu^2))}]^2\,,$$

wobei das Vorzeichen $(+)$, bzw. $(-)$ für $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} \geqq 0$ bzw. für $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} < 0$ gilt. Aus (39) folgt sofort, dass für $\mu_i^2 = M^2$ und $m^2 \leqq \leqq \mu^2 \leqq M^2$ (d. h. für $B_{1m^2} \leqq B \leqq B_{1M^2}$) die Ungleichung

$$(40) \qquad L(M^2, A, B) \geqq A(1 - M^2/\mu^2)$$

gilt (die Gleichheit gilt dabei für $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} = 0$).

Falls ferner $\mu^2 \leqq \mu_i^2 \leqq \mu_j^2$, $B = B_{1\mu^2}$ gilt, sind die Wurzeln $\lambda_{1,2}(\mu_i^2, A, B)$, $\lambda_{1,2}(\mu_j^2, A, B)$ reell und es gilt die Ungleichung

$$(41) \qquad L(\mu_i^2, A, B) \leqq L(\mu_j^2, A, B)$$

mit Rücksicht darauf, dass die Funktion $L(K, A, B)$ (siehe (39)) für $\mu^2 \leqq K$ zunehmend ist. Es ist also klar, dass im Intervall (37) die Zahl $\varrho(S(A, B))$ ihren Minimalwert für dienige $B = B_{1\mu^2}$ annimt, für die gleichzeitig

$$(42) \qquad 1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} = 0$$

gilt, so dass $L(M^2, A, B) = A(m^2, A, B)$ ist, d. h.

$$(43) \qquad A(1 - M^2/\mu^2) = m^2 B_{1\mu^2} - A = m^2(A + 1 - 2\sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}) - A$$

gilt. Aus (42) folgt sofort $A = \mu^2/(\mu^2 - 1)$ und nach Einsetzung in die Formel (43) bekommt man nach einer Umformung

$$(44) \qquad \mu^2 = \tfrac{1}{2}(M^2 + m^2)\,,$$

so dass auch in diesen Fall die Beziehung

$$(19) \qquad A = (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2)$$

gilt. Es gilt ferner

$$B = B_{1\mu^2} = A + 1 - 2\sqrt{(\mathrm{A}(1 - 1/\mu^2))} = A - 1\,,$$

was die Beziehung (17) ist. Für B gilt dann die Gleichheit

$$(45) \qquad B = 2/(M^2 + m^2 - 2)\,.$$

Im Fall $1 - m^2 < \sqrt{(1 - M^2)}$ gilt offensichtlich die Ungleichung

$$(M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)] < (1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}),$$

während für $1 - m^2 \geqq \sqrt{(1 - M^2)}$

$$(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)}) \leqq (M^2 - m^2)\,[2 - (M^2 + m^2)]$$

ist.

g) Es bleibt der Fall übrig, wenn (30) und

(46) $\qquad B \leqq B_{1m^2}$

gilt. Für jede B aus dem Intervall (46) existiert wieder eine solche Zahl μ^2, $0 < \mu^2 \leqq m^2$, dass $B = B_{1\mu^2} = A + 1 - 2\sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}$ ist.

Man untersuche jetzt den Verlauf der Funktion $\lambda_2(M^2, A, B)$ der Veränderlichen B für B vom Intervall (46) bei der gegebenen Zahl A aus dem Intervall (30). Angesichts (39) gilt

$$\lambda_2(M^2, A, B) = [\pm \sqrt{M^2}\,(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}) + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2,$$

wobei das Zeichen $(+)$, bzw. $(-)$ für $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} \geqq 0$ bzw. $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} < 0$ gilt. Für $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} \geqq 0$ gilt schrittweise

$$\frac{d}{dB}\lambda_2(M^2, A, B) = \frac{d}{dB}[\sqrt{M^2}\,(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}) +$$

$$+ \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2 =$$

$$= \frac{d}{d\mu^2}[\sqrt{M^2}\,(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}) + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]^2\,\frac{d\mu^2}{dB} =$$

$$= [\sqrt{M^2}\,(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}) + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]\,.$$

$$.\,A\sqrt{M^2}\,[\sqrt{M^2}\,\sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} - \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))}]\,\frac{d\mu^2}{dB}:$$

$$:\mu^4\sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}\,\sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))} < 0\,,$$

da

$$\sqrt{M^2}\,(1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))}) + \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))} \geqq 0\,,$$

$$\sqrt{M^2}\,\sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} - \sqrt{(A(1 - M^2/\mu^2))} \geqq 0\,,$$

$(d\mu^2/dB) = 1/(dB/d\mu^2) \geqq 0$, $A < 0$ ist. Ähnlicherweise kann man beweisen, dass $(d/dB)\,\lambda_2(M^2, A, B) < 0$ auch für $1 - \sqrt{(A(1 - 1/\mu^2))} < 0$ gilt. Die Funktion $\lambda_2(M^2, A, B)$ nimmt also ihren Minimalwert für $B = B_{1m^2}$ an (siehe den Fall f)).

Auf Grund der oben untersuchten Fälle kommen wir zum Schluss, dass im Fall $1 - m^2 < \sqrt{(1 - M^2)}$ der Spektralradius $\varrho(S(A, B))$ seinen Minimalwert $(M^2 - m^2)/[2 - (M^2 + m^2)]$ für $A = (M^2 + m^2)/(M^2 + m^2 - 2)$ und $B = A - 1 = 2/(M^2 + m^2 - 2)$ annimt. Aus den Beziehungen (8) folgen dann sofort die Beziehungen (1) und (2). Im Fall $1 - m^2 \geqq \sqrt{(1 - M^2)}$ nimmt der Spektralradius $\varrho(S(A, B))$ seinen Minimalwert $(1 - \sqrt{(1 - M^2)})/(1 + \sqrt{(1 - M^2)})$ an; diesen Wert kann man aber für festen Parameter $\beta = -1$ erreichen (siehe die Arbeit [2]).

Bemerkung. Es ist klar, dass dir untersuchte, von drei Parametern $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ abhängige Methode, eigentlich von zwei Parametern A, B (siehe (8)) abhängt. Wählt man also die Zahl α beliebig, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ und legt man $\alpha_1 = \alpha$, folgt sofort aus (8), dass

$$\alpha_2 = (1 - \alpha)/[\alpha(A - 1) + 1] \tag{47}$$

und

$$\beta = \{\alpha[(1 - \alpha) B - (A - 1)] - 1\}/[\alpha(A - 1) + 1] \tag{48}$$

gilt. Aus dem in dieser Arbeit bewiesenen Satz folgt also, dass die betrachtete, von drei Parametern abhängige Iterationsmethode im Fall $1 - m^2 < \sqrt{(1 - M^2)}$ am schnellsten für

$$\alpha_1 = \alpha\,, \quad \alpha_2 = (1 - \alpha)(2 - M^2 - m^2)/[2(1 - \alpha) - (M^2 + m^2)]\,,$$
$$\beta = 2\alpha^2/[2(1 - \alpha) - (M^2 + m^2)]$$

konvergiert; α ist dabei eine beliebige reelle zahl, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Literaturverzeichnis

[1] *D. M. Young:* Iterative Solution of large Systems. Academic Press, 1971.

[2] *M. Šisler:* Über die Konvergenz eines symmetrisches Iterationsverfahrens für lineare algebraische Gleichungssysteme. Apl. mat., 35 (1990), 471—480.

Souhrn

O OPTIMALISACI KONVERGENCE JISTÉ SYMETRICKÉ ITERAČNÍ METODY

MIROSLAV ŠISLER

V práci je zkoumána jistá symetrická iterační metoda pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic tvaru $x = Bx + b$, kde B je slabě dvojcyklická matice. Metoda závisí na třech reálných parametrech. V práci je řešena otázka optimální volby těchto parametrů z hlediska rychlosti konvergence.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Miroslav Šisler*, CSc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1.