Archivum Mathematicum

Václav Havel

Uniongraph der Familie von Zerlegungen in einer Menge

Archivum Mathematicum, Vol. 1 (1965), No. 4, 217--220

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104594

Terms of use:

© Masaryk University, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

UNIONGRAPH DER FAMILIE VON ZERLEGUNGEN IN EINER MENGE

Mitteilung auf der Konferenz über die Theorie der Graphen in Liblice (ČSSR) 1961.

VÁCLAV HAVEL, BRNO

Eingegangen am 4. November 1964

Ø. Ore hat in [3] einige Grundeigenschaften eines Paares von Zerlegungen auf der Menge graphentheoretisch untersucht. Im weiteren sollen gewisse Modifikationen des Oreschen Verfahrens für ein Paar der Zerlegungen in einer Menge, bzw. für eine willkürliche Familie der Zerlegungen in einer Menge gegeben werden. Es wird sich dabei eher um die Einführung neuer Begriffe als um die Ableitungen von neuen Ergebnisse handeln.

Es sei M eine feste nichtleere Menge. Wir bezeichnen $\mathscr{H} = \mathscr{H}(M)$ die Menge aller Zerlegungen in M, welche folgenderweise teilweise geordnet wird: für $A, B \in \mathscr{H}$ gilt $A \leqq B$ gerade dann, wenn jeder A-Block in einem gewissen B-Block enthalten wird. Es ist gut bekannt, daß in dieser Weise aus $\mathscr{H}$ ein vollständiger Halbverband entsteht und daß die Menge aller Zerlegungen auf M einen vollständigen Unterverband in $\mathscr{H}$ bildet.

Definition 1. Es sei $\boldsymbol{A} = (A_\iota)_{\iota \in J}$ eine willkürliche Familie von Zerlegungen in M. Man konstruiert den Graphen $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\boldsymbol{A})$ so: ist $(a_{\iota\varkappa})_{\varkappa \in K}$ die Familie aller A_ι-Blöcke ($\nu \in J$) so identifiziert man $J \times K$ mit der Knotenmenge des Graphen $\mathbf{G}$ und zwei solche Knoten verbindet man durch eine Graphenkante gerade dann, wenn die entsprechenden Blöcke $a_{\iota\varkappa}$ inzidieren. Einen solchen Graphen $\mathbf{G}$ nennen wir *Uniongraph* der Familie $\boldsymbol{A}$.[2]

Aus Definition 1 folgt sofort die Existenz der chromatischen Zerlegung ([4], S. 178) von $\mathbf{G}$ in card J Klassen, die immer aus allen Knoten $(\iota, \varkappa)$, $\varkappa \in K$, bei festen $\iota \in J$ gebildet werden. Eine solche chromatische Zerlegung von $\mathbf{G}$ nennen wir *natürlich*.

Man sieht leicht an, daß auch umgekehrt zu jedem c-chromatischen Graphen $\mathbf{H}$ eine solche Menge N und Familie $\boldsymbol{B}$ der Zerlegungen in N

[1] Wir gebrauchen die Terminologie und Bezeichnungen aus [1], [3], [5], [6].

[2] Die Bezeichnung „union graph" hat für den Fall eines Paares von Zerlegungen auf M schon Ø. Ore eingeführt ([3], S. 580).

zugeordnet werden kann, daß sich $\mathbf{H}$ als Uniongraph für $\mathbf{B}$, $c = \operatorname{card} \mathbf{B}$, erweist.

Wir kehren wieder zum Uniongraphen $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\boldsymbol{A})$ zurück und beschränken uns nur auf die Familie $\boldsymbol{A}$ der Zerlegungen auf M. Dann ist $\operatorname{card} J$ die chromatische Zahl von G und besonders für $\operatorname{card} J = 2$ bekommen wir den ursprünglichen „Uniongraphen" (union graph) von Ø. Ore ([6], S. 580).

Umgekehrt kann man jedem Graphen $\mathbf{H}$ mit chromatischer Zahl c eine solche Menge N und Familie $\mathbf{B}$ der Zerlegungen auf N so zuordnen, daß $\mathbf{H}$ der Uniongraph für $\mathbf{B}$ ist und $c = \operatorname{card} \mathbf{B}$. Wir haben so eine gewisse Interpretation für die Graphen gegebener chromatischer Zahl.

Definition 2. Unter dem *Übergang* in $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\boldsymbol{A})$ verstehen wir einen vollständigen Untergraphen, der aus jeder Klasse der natürlichen chromatischen Zerlegung gerade einen Knoten enthält.

Definition 3. Die Familie $\boldsymbol{A}$ heißt *verkuppelt*, wenn jeder Knoten des Graphen $\mathbf{G}$ gerade in einem Übergang dieses Graphen liegt. Die Familie $\boldsymbol{A}$ heißt *halbverkuppelt*, wenn in $\mathbf{G}$ wenigstens ein Übergang existiert und wenn jeder Knoten aus $\mathbf{G}$ höchstens in einem Übergang liegt.

Definition 4. Die Familie $\boldsymbol{A}$ heißt *von oben verschlingend*, wenn sich jeder $\sup \boldsymbol{A}$-Block auch als A_α-Block für gewisses $\alpha \in J$ erweist. Die Familie $\boldsymbol{A}$ heißt *von unten verschlingend*, wenn $\inf \boldsymbol{A}$ existiert und wenn sich jeder $\inf \boldsymbol{A}$-Block auch als ein A_α-Block für gewisses $\alpha \in J$ erweist.

Definition 5. Die Familie $\boldsymbol{A}$ heißt *gesättigt*,[3] wenn jeder $\sup \boldsymbol{A}$-Block folgende Eigenschaft besitzt: jeder A_α-Block, der in diesem $\sup \boldsymbol{A}$-Block liegt, inzidiert mit allen A_β-Blöcken ($\beta \neq \alpha$), die in diesem $\sup \boldsymbol{A}$-Block liegen.

Definition 6. Wir sagen, daß die Zerlegung $A_\alpha \in \boldsymbol{A}(\alpha \in J)$ in $\boldsymbol{A}$ *anhängt*, wenn zu jedem Paare verschiedener in demselben $\sup \boldsymbol{A}$-Block liegender A_α-Blöcke ein solcher A_β-Block existiert, der mit beiden diesen Blöcken inzidiert (für gewisses $\beta \in J$).

Definition 7. Die Familie $\boldsymbol{A}$ der Zerlegungen auf M nennen wir *distributiv*, wenn für jede Zerlegung B auf M die Beziehung $B \frown \smile_{\iota \in J} A_\iota = \smile_{\iota \in J} (B \frown A_\iota)$ besteht.

Aus der Definition des Uniongraphen der Familie $\boldsymbol{A}$ und aus der Charakterisierung des Supremums und des Infimums nach [1], S. 16—19 folgt sofort.

---

[3] Für $\operatorname{card} J = 2$ und für die Zerlegungen auf der Menge handelt es sich um *komplementäre* (O. Borůvka), *associable* (P. Dubreil) oder auch *vertauschbare* (Ø. Ore) Zerlegungen bzw. Äquivalenzrelationen auf der Menge.

Behauptung 1. *Die Zerlegung* sup $\mathbf{A}$ *kann man eineindeutig auf die Komponentenmenge von* $\mathbf{G}$ *abbilden. Die Zerlegung* inf $\mathbf{A}$ *existiert gerade dann, wenn in* $\mathbf{G}$ *wenigstens ein Übergang existiert; die Zerlegung* inf $\mathbf{A}$ *ist dann eineindeutig auf die Menge aller Übergänge in* $\mathbf{G}$ *abbildbar.*

Behauptung 2. *Ist die Familie* $\mathbf{A}$ *von oben verschlingend, dann existiert in jeder Komponente von* $\mathbf{G}$ *ein einziger privilegierter Knoten, der mit allen Knoten der Komponente verbunden wird, die nicht in derselben chromatischen Klasse liegen; handelt es sich um eine Familie der Zerlegungen auf* M *und ist die vorige Eigenschaft erfüllt, so erweist sich* $\mathbf{A}$ *als von oben verschlingend. Ist die Familie* $\mathbf{A}$ *von unten verschlingend, dann ist die Menge der Übergänge in* $\mathbf{G}$ *nicht leer und jeder Übergang in* $\mathbf{G}$ *enthält gerade einen privilegierten Knoten, der mit keinem Knoten außerhalb des untersuchten Überganges durch eine Graphenkante verbunden wird; handelt es sich um eine Familie* $\mathbf{A}$ *der Zerlegungen auf* M *und ist die vorige Eigenschaft erfüllt, so ergibt sich* $\mathbf{A}$ *als von unten verschlingend.*

Behauptung 3. *Die Zerlegung* $A_\alpha \in \mathbf{A}(\alpha \in J)$ *erweist sich als anhängend in* $\mathbf{A}$ *gerade dann, wenn jede zwei in derselben Komponente liegende Knoten aus zu* A_α *gehörender natürlicher chromatischer Klasse durch Graphenkanten mit demselben Knoten verbunden werden.*

Die Beweise der Behauptungen 2, 3, 4 folgen leicht nach Definitionen 4, 5, 6 durch Übertragung vom zerlegungstheoretischen ins graphentheoretische.

Behauptung 4. *Im Paare* (A_1, A_2) *ist* A_1 *gerade dann anhängend, wenn* $A = A_1 \smile (A \frown A_2)$ *gilt für jede solche Zerlegung* $A \in \mathscr{H}$, $A_1 \leqq A \leqq$ $\leqq A_1 \smile A_2$, *für welche* $A_1 \frown A_2$ *existiert.*

Beweis. Die Bedingung ist notwendig: Nach $A_1 \leqq A$, $A \frown A_2 \leqq A$ ist auch $A_1 \smile (A \frown A_2) \leqq A$, so daß noch $A_1 \smile (A \frown A_2) \geqq A$ zu beweisen verbleibt. Und tatsächlich, ein willkürlicher A-Block a liegt in einem gewissen $A_1 \smile A_2$-Block b und dieses b ist Mengenvereinigung von bestimmten ausgezeichneten A_1-Blöcken und von bestimmten ausgezeichneten A_2-Blöcken, wobei nach Voraussetzung zwei verschiedene ausgezeichnete A_1-Blöcke (A_2-Blöcke) immer mit demselben ausgezeichneten A_2-Block (A_1-Block) inzidieren. Wir führen die Durchdringung (von O. Borůvka) mit A-Block a aus und sehen, daß sich dieser Block als Mengenvereinigung voriger ausgezeichneter A_1-Blöcke mit den von ausgezeichneten A_2-Blöcken abgeleiteten $A \frown A_2$-Blöcken erweist bei Erhaltung bezüglicher Inzidenzen. Daraus ist es ersichtlich, daß A-Block a im bestimmten $A_1 \smile (A \frown A_2)$-Block liegt, was zu zeigen war.

Die Bedingung ist hinreichend:[4] Es sei die Zerlegung A so gewählt,

---

[4] Vgl. [3], S. 580—582.

daß sie mit A_1 stimmt bis auf A_1-Blöcke $a_1 \neq b_1$, deren Mengenvereinigung ein A-Block a sei; dabei verlangen wir, damit a_1 und b_1 in demselben $A_1 \smile A_2$-Block liegen, so daß $A \leqq A_1 \smile A_2$, und A erfüllt also beide vorgeschriebene Bedingungen. Dann existiert die Kettenverbindung[5] zwischen a_1, b_1, die durch A_1-Blöcke und $A \frown A_2$-Blöcke vermittelt wurde. Außer $a \in A$ ist aber jeder $A \frown A_2$-Block der Durchschnitt von $c_1 \in A_1$, $c_2 \in A_2$, $a_1 \neq c_1 \neq b_1$, so daß ein $d_2 \in A_2$ inzident zu a_1, b_1 existiert.

Behauptung 5. *Existiert das Infimum von $A, B \in \mathscr{H}$, ist b^* die Mengenvereinigung aller mit gegebenem B-Block b inzidenten A-Blöcke und ist $c \in A \smile B$, $c \supset b^*$, so ist $(c \sqcap A, b^* \sqcap (A \frown B))$ ein Paar von halbverkuppelten Zerlegungen.*

Beweis.[6] Zu jedem A-Block $a \subset c$ ordnen wir entweder den $b^* \sqcap (A \frown B)$-Block $a' \subset a$, wenn a mit b inzidiert oder ordnen wir kein Bild, wenn a mit b nicht inzidiert. Daraus folgt dann schon der verlangte Schluß. — Sind alle in c enthaltene A-Blöcke mit b inzident, ist $(c \sqcap A,\ b^* \sqcap (A \frown B))$ ein verkuppeltes Paar und diese Situation tritt insbesondere dann, wenn (A, B) gesättigt ist.

Durch Umformung des Oreschen Beweises aus [3], S. 582—583 und 585 kann man weiter folgende Ergebnisse bestätigen:

Behauptung 6. *Enthält der Uniongraph eines Paares von Zerlegungen A_1, A_2 keine Kreise, so existiert die Zerlegung A, $A_1 \leqq A \leqq A \smile A_2$, $A_1 \neq A \smile (A_1 \frown A_2)$. Existiert für A_1, A_2 die Zerlegung $A_1 \frown A_2$ und enthält der entsprechende Uniongraph keine Kreise, so gilt $A_1 \frown (A \smile A_2) = A \smile (A_1 \frown A_2)$ für jede Zerlegung $A \geqq A_1$, für welche $A_1 \frown (A \smile A_2)$ existiert.*

Behauptung 7. *Die Familie $\mathbf{A}$ ist distributiv dann und nur dann, wenn sie sich von oben verschlingend erweist.*

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Borůvka, O. Théorie der Zerlegungen in einer Menge (tschechisch mit französischer Zusammenfassung), Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No. 278, 1—37 (1946).

[2] Dubreil, P. et Dubreil-Jacotin, M. L. Théorie algébrique des relations d'équivalence, Journ. de math. pure et appl. 18 (1939), 63—95.

[3] Ore, Ø. Theory of equivalence relations, Duke Math. Journ. 9 (1942), 573—627.

[4] Čulík, K. On chromatic decomposition and chromatic numbers of graphs, Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No. 403, 177—185 (1959).

[5] Szász, G. Einführung in die Verbandstheorie, Leipzig 1962.

[6] Havel, V. Eigenschaften des Halbverbandes von Zerlegungen in einer Menge, Archivum Mathematicum 1 (1965).

---

[5] D. h. die Oresche „chain connecting" ([3], S. 579).

[6] Vgl. [2], S. 86—87 und auch eine Bemerkung des Verfassers in Czech. Mat. Journ. 13 (1963), Lemma, S. 537.