Jurij Ivanovich Gribanov

К проблеме сходимости метода редукции для бесконечных систем линейных уравнений

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 4 (1963), No. 1, 47--51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104928

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
4, 1 (1963)

К ПРОБЛЕМЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА РЕДУКЦИИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.И. ГРИБАНОВ, Казань

Наряду с бесконечной системой линейных уравнений

$$(1) \qquad X = AX + H: \quad x_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} x_n + h_m \quad (m = 1, 2, \dots)$$

рассмотрим усеченную систему уравнений

$$(2) \qquad \begin{cases} x_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} x_k^{(n)} + h_m & (m \le n) \\ x_m^{(n)} = 0 & (m > n) \end{cases}$$

Пусть система уравнений (2) при любом достаточно большом n имеет единственное решение $X_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, 0, 0, \dots)$. Если тогда $\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = x_m$ и $X = \{x_m\}$ является решением системы (1), то говорят, что система уравнений (1) разрешима методом редукции.

Известно (см., напр., [1], стр. 38), что любая вполне регулярная система уравнений имеет единственное ограниченное решение при любом ограниченном векторе H и что это ограниченное решение может быть найдено методом редукции. Этот результат можно сформулировать также следующим образом: если матричный оператор A непрерывно отображает пространство m ограниченных последовательностей в себя и $\|A\| < 1$, то система уравнений (1) однозначно разрешима в пространстве m и ее единственное принадлежащее пространству m решение может быть найдено методом редукции.

Естественно возникает вопрос: будет ли метод редукции давать последовательность векторов X_n, сходящихся к решению X вполне регулярной системы уравнений по норме пространства m? На примере простейсей системы уравнений

$$x_m = 1 \qquad (m = 1, 2, \cdots)$$

легко заметить, что в общем случае такая сходимость не имеет места.

В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых метод редукции для системы уравнений (1) с $\|A\| < 1$, рассматриваемой в произвольном координатном пространстве [2], сходится к решению системы по норме пространства.

Через ℓ мы обозначаем в дальнейшем произвольное координатное пространство. Пространство m, пространства Ф. Рисса ℓ_p $(p \geq 1)$ пространства последовательностей Орлича [3] является координатными пространствами. Через $[\ell]$ мы обозначаем, как обычно, замыкание в метрике пространства ℓ множества всех векторов с конечным числом отличных от нуля координат. Для того чтобы вектор X из ℓ принадлежал $[\ell]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n X\| = \lim_{n\to\infty} \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\| = 0 .$$

Если матричный оператор A непрерывно отображает ℓ в себя и норма $\|A\| < 1$, то система уравнений (1) однозначно разрешима в пространстве ℓ. Так как в пространстве ℓ норма матричного оператора A_n, соответствующего системе уравнений (2), $\|A_n\| \leq \|A\|$, то при $\|A\| < 1$ система уравнений (2) однозначно разрешима при любом $H \in \ell$.

Имеет место следующая общая

Теорема 1. Пусть $\|A\| < 1$. Тогда для того чтобы метод редукции определял последовательность векторов X_n, сходящихся по норме координатного пространства ℓ к единственному решению $X \in \ell$ системы уравнений (1), необходимо и достаточно, чтобы $A\{\ell\} \subset [\ell]$ и $H \in [\ell]$. Имеет место оценка

$$\|X - X_n\| \leq \frac{\|R_n X\|}{1 - \|A\|} \tag{3}$$

<u>Необходимость</u>. Последовательность векторов $\{X_n\} \subset [\ell]$. Поэтому последовательность X_n может сходиться по норме пространства ℓ к решению X системы уравнений (1) лишь в том случае, когда $X \in [\ell]$. Но из $X = AX + H$ следует, что $X \in [\ell]$ тогда и только тогда, когда $A\{\ell\} \subset [\ell]$ и $H \in [\ell]$.

<u>Достаточность</u>. Если $A\{\ell\} \subset [\ell]$ и $H \in [\ell]$, то также и $X \in [\ell]$. Но тогда из оценки (3) следует, что $X_n \to X$ по норме пространства ℓ. Таким образом, доказательство достаточности условий теоремы сводится к установлению оценки (3).

При $m \leq n$

$$x_m - x_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}(x_k - x_k^{(n)}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{mk} x_k .$$

Следовательно, при любом векторе $Y = \{y_m\}$

$$\sum_{m=1}^{n} (x_m - x_m^{(n)}) y_m = \sum_{m=1}^{n} y_m \sum_{k=1}^{n} a_{mk}(x_k - x_k^{(n)}) + \sum_{m=1}^{n} y_m \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{mk} x_k ,$$

что можно записать в следующей форме:

$$(P_n(X - X_n), Y) = (P_n A P_n (X - X_n), Y) + (P_n A R_n X, Y).$$

Здесь $P_n V = V - R_n V$.

Но из предыдущего равенства вытекает, что

$$\|P_n(X - X_n)\| \leq \|A\| \cdot \|P_n(X - X_n)\| + \|A\| \cdot \|R_n X\| .$$

Так как по предположению $\|A\| < 1$, то

$$\| P_n (X - X_n) \| \leq \frac{\|A\| \cdot \|R_n X\|}{1 - \|A\|} .$$

Следовательно,

$$\|X - X_n\| \leq \| P_n (X - X_n) \| + \|R_n X\| \leq \frac{\|R_n X\|}{1 - \|A\|} ,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Оценка (3) неэффективна. В [4] при более жестких условиях (дополнительное требование ω-непрерывности системы уравнений (1) (указаны различные достаточно эффективные оценки.

Отметим некоторые частные случаи теоремы 1.

<u>Теорема 2</u>. Пусть (1) является вполне регулярной системой уравнений: $\sup\limits_{1 \leq m < \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| < 1$. Тогда для того чтобы метод редукции сходился по норме пространства m к решению $X \in m$ системы уравнений, необходимо и достаточно, чтобы $A\{m\} \subset C_0$ и $H \in C_0$.

Здесь C_0 обозначает пространство сходящихся к нулю последовательностей, $c_0 = [m]$.

Матричный оператор A отображает пространство ℓ_1 в себя тогда и только тогда, когда $\alpha = \sup\limits_{1 \leq n < \infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$. При этом $\|A\| = \alpha$. Так как $[\ell_1] = \ell_1$, то из теоремы 1 вытекает

<u>Теорема 3</u>. Если $\alpha < 1$, то система уравнений (1) однозначно разрешима в пространстве ℓ_1 и метод редукции сходится по норме пространства ℓ_1 к решению $X \in \ell_1$ системы уравнений (1).

Аналогичный результат имеет место и для бесконечных ситем линейных уравнений в пространствах ℓ_p $(p > 1)$.

Литература

[1] Л.В. КАНТОРОВИЧ и В.И. КРЫЛОВ, Приближенные методы высшего анализа. ГТТИ, 1950.

[2] Ю.И. ГРИБАНОВ, Координатные пространства и бесконечные системы линейных уравнений, 1. Изв. вузов, МАТЕМАТИКА, № 4 (29), 1962.

[3] J.J. GRIBANOV, Zur Theorie der Orliczschen Koordinatenräume und der unendlichen Matrizenabbildungen. Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math.-Naturwiss. Reihe, VIII, 3, 1958/59, S. 339 - 349.

[4] Ю.И. ГРИБАНОВ, О методе редукции для бесконечных систем линейных уравнений. Изв. вузов, МАТЕМАТИКА, № 1 (26), 1962.