Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

A. L. Kuz'mina

О краевой задаче Гильберта с производным смещением

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 5 (1964), No. 3, 117--120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104965

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

5, 3 (1964)

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТА С ПРОИЗВОДНЫМ СМЕЩЕНИЕМ

А.Л. КУЗЬМИНА, Казань

Пусть L -замкнутая кривая Ляпунова, ограничивающая область D , $\omega(t)$, $t \in L$, - функция, имеющая непрерывную и отличную от нуля производную, отображает взаимно однозначно с сохранением направления обхода кривую L в себя.

Краевая задача Гильберта со смещением формулируется следующим образом.

Требуется найти аналитическую в области D и непрерывную в $\bar{D}$ функцию $\Phi(z) = u(z) + i v(z)$ удовлетворяющую на L условию

$$(1) \qquad a(t) u(\omega(t)) + b(t) v(t) = c(t),$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ - заданные на L вещественные функции.

Частный случай этой и более общей задачи, когда $\omega(\omega(t)) \equiv t$, рассмотрен в работах И.М. Мельника [1] и С.Г. Литвинчука и Э.Г. Хасабова [2].

В настоящей заметке мы изучим краевую задачу Гильберта с производным смещением $\omega(t)$.

Нетрудно показать, что краевая задача (1) для произвольной области, ограниченной кривой Ляпунова, может быть сведена с помощью конформного отображения к аналогичной задаче для круга.

Поэтому мы ограничимся изучением последней.

Итак, пусть L - единичная окружность.

Перепишем краевое условие (1)

$$(1') \qquad \frac{a(t)}{2}[\Phi^+(\omega(t)) + \overline{\Phi^+(\omega(t))}] + \frac{b(t)}{2i}[\Phi^+(t) - \overline{\Phi^+(t)}] = c(t)$$

и будем искать решение краевой задачи (1') в виде:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + iC, \tag{2}$$

где $\varphi(\tau)$ – вещественная функция, C – некоторая вещественная постоянная.

Подставив граничные значения $\Phi(z)$ в (1'), придем к особому интегральному уравнению со смещением

$$a(t)\varphi(\omega(t)) - \frac{ib(t)}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = c^*(t), \tag{3}$$

где $c^*(t) = c(t) - 2iCa(t) - [a(t) - ib(t)]C'$,

$$C' = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau .$$

Очевидно, что каждому решению особого интегрального уравнения (3) соответствует по формуле (2) решение краевой задачи (1') или (1) и обратно.

Рассмотрим особое интегральное уравнение со смещением вида:

$$\varphi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \omega^{-1}(t)} d\tau = c_1(t), \tag{4}$$

где $b_1(t)$ и $c_1(t)$ – комплексные функции, заданные на L, L – гладкая замкнутая кривая.

Обозначим через C_α пространство функций $f(t)$, $t \in L$, удовлетворяющих условию H_α, $0 < \alpha \le 1$, с нормой

$$C_\alpha(f) = C(f) + H(f, \alpha),$$

где

$$C(f) = \max_{t \in L} |f(t)|, \quad H(f, \alpha) = \sup_{t_1, t_2 \in L} \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} .$$

C_α – есть B – пространство.

Будем предполагать, что функции $b_1(t)$ и $c_1(t) \in C_\alpha$, $0 < \alpha \le 1$.

Так как линейный оператор $\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ преобразует пространство C_α, $0 < \alpha < 1$, в себя и является ограниченным оператором (см., например, [3]), то оператор

$$S\varphi = \frac{b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\omega^{-1}(t)}\,d\tau$$

в силу сделанных предположений относительно $b_1(t)$ и $\omega(t)$ будет также линейным ограниченным оператором.

При условии, что $C_\alpha(b_1)$ меньше определенной постоянной, зависящей от функции $\omega(t)$, оператор S является оператором сжатия. Тогда особое интегральное уравнение (4) будет иметь единственное решение $\varphi(t)$, $\varphi(t)\in C_\alpha$, если $0<\alpha<1$, и $\varphi(t)\in C_{1-\varepsilon}$, $0<\varepsilon<1$ (ε - любое), если $\alpha=1$.

Очевидно, что особое интегральное уравнение со смещением (3), если функции $a(t)$, $a(t)\neq 0$, $b(t)$ и $c(t)\in C_\alpha$, $0<\alpha\leq 1$, может быть приведено к особому интегральному уравнению вида (4), а поэтому, если $C_\alpha\left(\frac{b}{a}\right)$ меньше определенной постоянной, зависящей от $\omega(t)$, будет иметь решение $\varphi(t)$, $\varphi(t)\in C_\alpha$, если $0<\alpha<1$, и $\varphi(t)\in C_{1-\varepsilon}$, $0<\varepsilon<1$ (ε - любое), если $\alpha=1$, линейно зависящее от одной вещественной произвольной постоянной.

Следовательно, и краевая задача (1') или (1) при этих условиях имеет решение, зависящее от одной вещественной произвольной постоянной.

В заключение укажем одну краевую задачу для уравнения смешанного типа

$$(*) \qquad u''_{x^2} + \operatorname{sgn} y \, u''_{y^2} = 0,$$

приводящуюся к краевой задаче (1) известным способом, предложенным А.В. Бицадзе (см. также [4]).

Требуется найти функцию $u(x,y)$ являющуюся решением уравнения (*) при $y\neq 0$ в области D, ограниченной кривой Ляпунова σ, лежащей в полуплоскости $y\geq 0$ и касающейся при Ox в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$ характеристиками уравнения AC и BC, непрерывную в $\bar{D}-(0,1)$, частные производные которой $u'_x(x,y)$ и $u'_y(x,y)$ непрерывно продолжимы на отрезок AB и удовлетворяющую условиям:

$$u|\sigma = \varphi(\tau), \quad u/_{AC} = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

и

$$a(x)u^+(\omega(x), 0) + b(x)u^-(x,0) = c(x),$$
$$a_1 u^{+\prime}_y(x,0) + b_1 u^{-\prime}_y(x,0) = c_1(x),$$
$$x \in AB$$

где a_1 и b_1 - некоторые постоянные, отличные от нуля, $\omega'(x)$ - функция с непрерывной производной $\omega'(x)$ причем $\omega'(x) \neq 0$ и $\omega'(0) = \omega'(1) = 1$, взаимно однозначно отображающая отрезок AB в себя, $\varphi(\tau)$, $\psi(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $c_1(x)$ - некоторые заданные вещественные функции.

Л и т е р а т у р а

[1] И.М. МЕЛЬНИК, ДАН, 138,№ 3, 1961.

[2] Г.С. ЛИТВИНЧУК и Э. ХАСАВОВ, ДАН, 142,№ 2, 1962.

[3] Ф.Д. ГАХОВ, Краевые задачи, М. 1963.

[4] В.И. ЖЕГАЛОВ, Ученые записки КГУ, т.122, кн.3, 1962.