Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
6, 1 (1965)

EINE VERALLGEMEINERUNG DER MEHLERSCHEN FORMEL

Jiří FIALA, Praha

Es gibt mehrere Beweise (siehe z.B.[1],[2]) der sogenannten Mehlerschen Formel

$$(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left[\frac{2xyz - z^2(x^2+y^2)}{1-z^2}\right]$$

wo das $H_n(x)$ das Hermitesche Polynom des n-ten Grades ist. Hier wird ein Beweis auf dem Grund bestimmter Integraldarstellung des Hermiteschen Polynomen gegeben und dieses Resultat auf die n-dimensionale Hermitesche Polynome verallgemeinert.

Die von uns benützte Integraldarstellung hat die folgende Form:

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+it)^n e^{-t^2} dt$$

und ihr Beweis wird leicht durch die Entwicklung nach der binomischen Formel des Integranden, durch die gliedweise Integration und durch die Vergleichung mit der gewöhnlichen Darstellung gewonnen:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = 2^n x^n - 2^{n-1}\binom{n}{2} x^{n-2} + 2^{n-2} \cdot 1.3 \cdot \binom{n}{4} x^{n-4} - \dots$$

Und jetzt ein neuer Beweis der Melherschen Formel (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2z(x+it)(y+it) - s^2 - t^2} ds dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{2xyz} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2zisx - s^2] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2zity - 2zts - t^2] dt ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2xyz} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2zxis - s^2 - y^2z^2 - 2iysz^2 + z^2s^2]ds =$$

$$= e^{2xyz - y^2z^2} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp[-\frac{1}{1-z^2} z^2(x^2 - 2xyz + y^2z^2)]$$

n-dimensionale Hermitesche Polynome sind so definiert: Es sei $\varphi(x,x)$ eine reelle positiv-definite quadratische Form mit der Matrix $A = \|a_{ik}\|$. $H^{(\varphi)}_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n)$ bezeichnen wir die Koeffizienten der Potenzentwicklung der Funktion

$$\exp[2\sum_{i=1}^{n} z_i \xi_i - \varphi(z,z)] ,$$

wo

$$\xi_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_k .$$

Also, die definierende Relation ist:

$$(2) \quad \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{z_n^{m_n}}{m_n!} H^{(\varphi)}_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n) = \exp[2\sum_{i=1}^{n} z_i \xi_i - \varphi(z,z)] .$$

Satz 1. Für das, zu der quadratischen Form φ zugehörige n-dimensionale Hermitesche Polynom gilt diese Integraldarstellung

$$H^{(\varphi)}_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n) =$$

$$(3) \quad = \frac{2^{m_1+\dots+m_n}}{\sqrt{\Delta_\varphi}(\sqrt{\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_1 + it_1)^{m_1} \dots (\xi_n + it_n)^{m_n} e^{-\tilde{\varphi}(t,t)} dt_1 \dots dt_n$$

wo Δ_φ die Determinante der Form φ und $\tilde{\varphi}$ die zu φ adjungierte Form sind, d.h.

$$\tilde{\varphi}(z,z) = \sum_{i,k} \frac{A_{ik}}{\Delta_\varphi} z_i z_k$$

wo A_{ik} die algebraischen Komplementen der Elementen a_{ik} sind. Beweis wird so durchgeführt, dass wir beweisen, dass die durch Integrale (3) definierten Funktionen die Relation (2) erfüllen:

$$\sum_{m_1,\dots,m_n} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{z_n^{m_n}}{m_n!}\cdot\frac{2^{m_1+\dots+m_n}}{\sqrt{\Delta_\varphi}(\sqrt{\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi_1+it_1)^{m_1}\dots$$

$$\dots(\xi_n+it_n)^{m_n}e^{-\tilde{\varphi}(t,t)}dt_1\dots dt_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta_\varphi}(\sqrt{\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[2(z_1t_1i+\dots$$

$$\dots+z_nt_ni)-\tilde{\varphi}(t,t)]\,.$$

$$.\,dt_1\dots dt_n\,.\,\exp[2(z_1\xi_1+\dots+z_n\xi_n)] =$$

$$= \exp[2(z_1\xi_1+\dots+z_n\xi_n)-\varphi(t,t)]\quad,$$

nach dem bekannten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\varphi(x,x)+2\sum_{i=1}^{n}c_ix_i}\,dx_1\dots dx_n=\sqrt{\frac{\pi^n}{\Delta_\varphi}}\,e^{\tilde{\varphi}(c,c)}$$

(siehe z.B. [1] s. 206).

Satz 2. Seien φ, ψ zwei reelle positiv-definite quadratische Formen und $H^{(\varphi)}_{m_1,\dots,m_n}$, $H^{(\psi)}_{m_1,\dots,m_n}$ entsprechende Hermitesche Polynome. Die quadratische Form

$$\Phi(s,s) = \tilde{\psi}(s,s) - \varphi(zs,zs)$$

mit der Matrix

$$\left\| \frac{B_{ij}}{\Delta_\psi} - z_i z_j a_{ij} \right\|$$

und mit der Determinante, die wir $\Delta(z)$ bezeichnen, ist positiv-definit für hinreichend kleine z. Für diese z gilt die folgende Verallgemeinerung der Mehlerschen Formel

$$\sum_{m_1,\dots,m_n}\frac{z_1^{m_1}}{2^{m_1}m_1!}\cdots\frac{z^{m_n}}{2^{m_n}m_n!}H^{(\varphi)}_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n)H^{(\psi)}_{m_1,\dots,m_n}(y_1,\dots,y_n)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\Delta_\psi\cdot\Delta(z)}}\exp[2\sum_\nu x_\nu\xi_\nu\eta_\nu-\varphi(z\eta,z\eta)+\tilde{\Phi}(c,c)]$$

wo

$$\eta_\nu=\sum_\mu b_{\nu\mu}z_\mu\,,\quad c_\nu=z_\nu(\xi_\nu-\sum_\mu a_{\mu\nu}z_\mu\eta_\mu)\,.$$

(die Form ψ hat die Matrix $B=\|b_{\nu\mu}\|$.)

Beweis wird so durchgeführt, dass wir in die rechte Seite der bewiesenden Formel die Integraldarstellung nach dem Satz 1 einsetzen und folgende Berechnungen durchführen:

$$\sum_{m_1,\dots,m_n} \frac{x_1^{m_1}}{2^{m_1} m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{2^{m_n} m_n!} H^{(\varphi)}_{m_1,\dots,m_n} \cdot H^{(\psi)}_{m_1,\dots,m_n} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n \sqrt{\Delta_\varphi \Delta_\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum \frac{(2x_1)^{m_1} \dots (2x_n)^{m_n}}{m_1! \dots m_n!} (\xi_1 + it_1)^{m_1} \times$$

$$\times (\eta_1 + is_1)^{m_1} \dots (\xi_n + it_n)^{m_n} (\eta_n + is_n)^{m_n} \exp[-\tilde{\varphi}(t,t) -$$

$$- \tilde{\psi}(s,s)] \, dt_1 \, ds_1 \dots dt_n \, ds_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n \sqrt{\Delta_\varphi \Delta_\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2 \sum_\nu x_\nu (\xi_\nu + it_\nu)(\eta_\nu - is_\nu) -$$

$$- \tilde{\varphi}(t,t) - \tilde{\psi}(s,s) \, dt_1 \dots dt_n \, ds_1 \dots ds_n =$$

$$= \frac{\exp[2 \sum_\nu x_\nu \xi_\nu \eta_\nu]}{\pi^n \sqrt{\Delta_\varphi \Delta_\psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[2i \sum_\nu x_\nu \xi_\nu s_\nu -$$

$$- \tilde{\psi}(s,s)] . \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{2n} \exp[2 \sum_\nu x_\nu (i\eta_\nu - s_\nu) t_\nu -$$

$$- \tilde{\varphi}(t,t)] \, dt_1, \dots, dt_n \, ds_n = \frac{\exp[2 \sum_\nu x_\nu \xi_\nu \eta_\nu]}{\pi^n \sqrt{\Delta_\varphi \Delta_\psi}} \times$$

$$\times \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{2n} \exp[2i \sum_\nu x_\nu \xi_\nu s_\nu - \tilde{\psi}(s,s)] . \sqrt{\pi^n \Delta_\varphi} \times$$

$$\times \exp[\varphi(xi\eta - xs, \, xi\eta - xs)] \, ds_1 \dots ds_n =$$

$$= \frac{\exp[2 \sum_\nu x_\nu \xi_\nu \eta_\nu - \varphi(x\eta, x\eta)]}{\sqrt{\pi^n} \sqrt{\Delta_\psi}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [2 \sum_{\nu} i x_{\nu} (\xi_{\nu} - \sum_{\mu} a_{\mu\nu} x_{\mu} \eta_{\mu}) s_{\nu} -$$

$$- \widetilde{\psi}(s, s) - \varphi(xs, xs))] ds_1 \ldots ds_n .$$

Woraus man leicht ersehen kann, was zu bewiesen war.

L i t e r a t u r :

[1] A. ERDÉLYI, Über eine erzeugende Funktion von Produkten Hermitescher Polynome, Math. Zeitschrift 44 (1939) 201-211.

[2] N. WIENER, The Fourier Integral and certain of its applications, N.Y., 1933, Ch.I. § 87.