

Václav Havel

Zerlegungen in kartesischen Funktionen (Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 1, 43--47

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104992>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ZERLEGUNGEN IN KARTESISCHEN FUNKTIONEN

(vorläufige Mitteilung)

Václav HAVEL, Brno

Es sei $\Gamma \neq \emptyset$ die Menge, welche den Element o nicht enthält, weiter setzen wir $\Gamma_o = \Gamma \cup \{o\}$ ¹⁾.

Es sei $(M_{\alpha_o})_{\alpha_o}$ Familie von nichtleeren Mengen und f Surjektion zwischen $\prod_{\alpha} M_{\alpha}$, M_o ²⁾; das Paar $F = ((M_{\alpha_o})_{\alpha_o}, f)$ nennen wir kartesische Funktion oder kurz nur Funktion.

Ist $\emptyset \neq M'_{\alpha_o} \subseteq M_{\alpha_o}$ für jedes α_o und ist f' die Verengung von f auf $\prod_{\alpha} M'_{\alpha}$, wobei $M'_o = f(\prod_{\alpha} M'_{\alpha})$, so heisst $F' = ((M'_{\alpha_o})_{\alpha_o}, f')$ Subfunktion von F .

Unter der Abbildung σ zwischen Funktionen $F = ((M_{\alpha_o})_{\alpha_o}, f)$, $F^* = ((M^*_{\alpha_o})_{\alpha_o}, f^*)$ verstehen wir die Familie $(\sigma_{\alpha_o})_{\alpha_o}$ von Abbildungen σ_{α_o} zwischen M_{α_o} , $M^*_{\alpha_o}$ (für jedes α_o).

Die Abbildung σ heisst Homomorphismus, wenn $\sigma_o f((a_{\alpha})_{\alpha}) = f^*(\sigma_{\alpha} a_{\alpha})$ für jede Auswahl $a_{\alpha} \in M_{\alpha}$, $\alpha \in \Gamma$ gilt.

Unter der Zerlegung in der Funktion $F = ((M_{\alpha_o})_{\alpha_o}, f)$ verstehen wir die Familie $(\xi_{\alpha_o})_{\alpha_o}$, wo ξ_{α_o} eine Zerlegung in M_{α_o} für jedes α_o bedeutet; ist dabei ξ_{α_o} sogar die Zerlegung auf M_{α_o} für jedes α_o , so sprechen wir über die Zerle-

1) Im weiteren durchlaufen α, β, \dots die Menge Γ und α_o, β_o, \dots die Menge Γ_o .

2) Das Symbol \prod bezeichnet da das kartesische Produkt der Mengen.

Satz auf F. 3)

Es sei $\sigma = (\sigma_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ Epimorphismus zwischen Funktionen $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, $F^* = ((M_{\alpha_0}^*)_{\alpha_0}, f^*)$. Die durch σ induzierte Zerlegung $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ auf F wird folgenderweise definiert: \mathfrak{Z}_{α_0} -Blöcke sind vollständige Vorbilder der Elemente von $M_{\alpha_0}^*$ bei σ_{α_0} für jedes α_0 .

Die Zerlegung $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ heisst erzeugend, wenn für jede Auswahl $A_\alpha \in \mathfrak{Z}_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ ein \mathfrak{Z}_0 -Block $A_0 \supseteq f(\prod A_\alpha)$ existiert.

Ist $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, so definieren wir die zu F gehörende Subfunktion $F' = ((M'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$ in F so, dass sich M'_{α_0} als die Vereinigung von allen \mathfrak{Z}_{α_0} -Blöcken für jedes α_0 erweist und f' Verengung von f auf $\prod M'_\alpha$ ist.

Im folgenden bedeute $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}^l)_l$ ⁴⁾ willkürliche Familie von Zerlegungen in gegebener Funktion $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ und wir setzen $\mathfrak{Z}^l = (\mathfrak{Z}^l_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ für jedes l und $\mathfrak{Z}_{\alpha_0} = (\mathfrak{Z}^l_{\alpha_0})_l$ für jedes α_0 .

Die Menge $\mathcal{Y}(F)$ aller Zerlegungen in F sei folgenderweise halbgeordnet: für $\mathfrak{Z}^1 = (\mathfrak{Z}^1_{\alpha_0})_{\alpha_0}$, $\mathfrak{Z}^2 = (\mathfrak{Z}^2_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ aus $\mathcal{Y}(F)$ bedeute $\mathfrak{Z}^1 \leq \mathfrak{Z}^2$, dass $\mathfrak{Z}^1_{\alpha_0} \leq \mathfrak{Z}^2_{\alpha_0}$ in $\mathcal{Y}(M_{\alpha_0})$ für jedes α_0 . Dann ergibt sich $\mathcal{Y}(F)$ als vollständiger Halbverband: für jede Familie von Zerlegungen in F existiert die

3) Für die Terminologie der Theorie von Zerlegungen in Mengen vgl. [1], [2].

4) Index l durchläuft (dieselbe) Menge \mathcal{J} .

Zerlegung $\sup \mathcal{Z} = (\sup \mathcal{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0} \in \mathcal{Y}(F)$ während $\inf \mathcal{Z}$ nicht immer existiert; wenn aber $\inf \mathcal{Z} \in \mathcal{Y}(F)$ existiert, so ist $\inf \mathcal{Z} = (\inf \mathcal{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$.

Satz 1. Es sei σ Epimorphismus zwischen Funktionen $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, $F^* = ((M_{\alpha_0}^*)_{\alpha_0}, f^*)$. Die durch σ induzierte Zerlegung ist dann erzeugend in F .

Satz 2. Es sei $F^* = ((M_{\alpha_0}^*)_{\alpha_0}, f^*)$ Subfunktion in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ und $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ eine erzeugende Zerlegung in F mit zugehöriger Subfunktion $F' = ((M_{\alpha_0}')_{\alpha_0}, f')$, so dass $M_{\alpha_0} \cap M_{\alpha_0}^* \neq \emptyset$ für jedes α_0 . Setzen wir $\overline{\mathcal{Z}}_{\alpha_0} = M_{\alpha_0} \cap M_{\alpha_0}^*$ ⁵⁾ für jedes α_0 , so ist $\overline{\mathcal{Z}} = (\overline{\mathcal{Z}}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung in F .

Satz 3. Ist $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}^L)_L$ Familie von erzeugenden Zerlegungen in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ und ist $F^L = ((M_{\alpha_0}^L)_{\alpha_0}, f^L)$ die zu \mathcal{Z}^L zugehörigen Subfunktion für jedes L , wobei $\bigcap_L M_{\alpha_0}^L \neq \emptyset$ für jedes α_0 , so existiert die Zerlegung $\inf \mathcal{Z} \in \mathcal{Y}(F)$ und ist erzeugend.

Satz 4. Es sei \mathcal{Z}^i erzeugende Zerlegung in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ mit zugehöriger Subfunktion $F^i = ((M_{\alpha_0}^i)_{\alpha_0}, f^i)$; $i = 1, 2$. Setzen wir voraus, dass jeder $\mathcal{Z}_{\alpha_0}^i$ -Block die Menge $M_{\alpha_0}^j$ durchschneidet und weiter sei $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ die Zerlegung in F , wobei $\mathcal{Z}_{\alpha_0} \geq \mathcal{Z}_{\alpha_0}^i \sqcap M_{\alpha_0}^j$ ⁶⁾ für $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$.

5) Das Symbol \sqcap bezeichnet die sog. Hülle (nach O. Borůvka); [1], S. 7-8.

6) Das Symbol \sqcap bezeichnet die Durchdringung der Zerlegung mit der Menge nach O. Borůvka; [1], S. 8.

und für jedes α_0 ; dabei soll den Zerlegungen $\mathcal{X}_{\alpha_0}^1 \cap M_{\alpha_0}^2$, $\mathcal{X}_{\alpha_0}^2 \cap M_{\alpha_0}^1$ dieselbe Subfunktion zugehören. Ist \mathcal{X} erzeugend, so sind aus die durch \mathcal{X} erzwungene Ueberdeckungen \mathcal{X}^I , \mathcal{X}^{II} von \mathcal{X}^1 , \mathcal{X}^2 erzeugend.

Satz 5. Es sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}^\alpha)_\alpha$ Familie von erzeugenden Zerlegungen in $F = ((M_1, M_2, \dots, M_n, M_0), f)$ also für den Fall der endlichen Indexmenge Γ . Dann ist auch $\sup \mathcal{X}$ erzeugende Zerlegung in F .

Es sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung auf $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$. Unter der Faktorfunktion F/\mathcal{X} versteht man die Funktion $((\mathcal{X}_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f/\mathcal{X})$, wo mit f/\mathcal{X} eine solche Surjektion zwischen $\prod_{\alpha} \mathcal{X}_{\alpha}$, \mathcal{X}_0 bezeichnet wird, für welche die Beziehung $f/\mathcal{X}((A_{\alpha})_{\alpha}) = A_0$ eintritt, wo $f(\prod_{\alpha} A_{\alpha}) \subseteq A_0 \in \mathcal{X}_0$ für die Auswahl $A_{\alpha} \in \mathcal{X}_{\alpha}$, $\alpha \in \Gamma$.

Auf Faktorfunktionen kann man die Begriffe von Ueberdeckung und Verfeinerung, Hülle und Durchdringung, Verknüpfung et cetera leicht übertragen. Formulieren wir noch einige Sätze, welche die Faktorfunktionen betreffen.

Satz 6. Es sei $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung auf der Funktion $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$; wir setzen $F/\mathcal{X} = F'$. Es sei weiter $\mathcal{X}' = (\mathcal{X}'_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ Zerlegung auf F' und $\mathcal{X}^* = (\mathcal{X}^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ die durch \mathcal{X}' erzwungene Ueberdeckung von \mathcal{X} . Dann ist \mathcal{X}' erzeugend, gerade wenn \mathcal{X}^* erzeugend ist.

 7) \mathcal{X}^I ist die durch \mathcal{X} erzwungene Ueberdeckung von \mathcal{X}^1 , wenn für jedes α_0 die Zerlegung $\mathcal{X}_{\alpha_0}^I$ die durch \mathcal{X}_{α_0} erzwungene Ueberdeckung von $\mathcal{X}_{\alpha_0}^1$ und analogisch für \mathcal{X}^{II} ; siehe [1], S. 9.

Satz 7 (erster Isomorphiesatz). Existiert Epimorphismus $\sigma = (\sigma_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ zwischen $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, $F^* = ((M_{\alpha_0}^*)_{\alpha_0}, f^*)$, so existiert auch Isomorphismus $\rho = (\rho_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ zwischen F^* und gewisser Faktorfunktion $F' = F/\mathcal{Z}$ und umgekehrt. e)

Das Isomorphismus ρ verwirklicht sich so, dass in ρ_{α_0} jedem \mathcal{Z}'_{α_0} -Block A'_{α_0} als Bild $\sigma_{\alpha_0} A'_{\alpha_0} \in M_{\alpha_0}^*$ entspricht (für jedes α_0).

Satz 8 (zweiter Isomorphiesatz). Es seien $\mathcal{Z}^1 = (\mathcal{Z}^1_{\alpha_0})_{\alpha_0}$, $\mathcal{Z}^2 = (\mathcal{Z}^2_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegungen in $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$. Sind F/\mathcal{Z}^1 , F/\mathcal{Z}^2 verknüpft, so existiert ein Isomorphismus $\rho = (\rho_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ zwischen ihnen so, dass in ρ_{α_0} jedem $\mathcal{Z}^1_{\alpha_0}$ -Block mit ihm inzidenter $\mathcal{Z}^2_{\alpha_0}$ -Block (für jedes α_0) entspricht.

Satz 9 (dritter Isomorphiesatz). Es sei $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung auf $F = ((M_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ und $\mathcal{Z}' = (\mathcal{Z}'_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ erzeugende Zerlegung auf $F' = F/\mathcal{Z} = ((M'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$. Dann existiert das Isomorphismus $\rho = (\rho_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ zwischen F'/\mathcal{Z}' und der durch F'/\mathcal{Z}' erzwungenen Ueberdeckung von F' : in ρ_{α_0} entspricht jedem \mathcal{Z}'_{α_0} -Block A''_{α_0} die Vereinigung aller in A''_{α_0} enthaltenen \mathcal{Z}_{α_0} -Blöcke (für jedes α_0).

L i t e r a t u r

- [1] O. BORŮVKA, Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, Berlin 1960.
 [2] V. HAVEL, Kartesisch assoziierte Zerlegungen (vorläufige Mitteilung), CMUC 6,1(1965).

 8) Wir sprechen dann über Faktorfunktion die durch σ induziert wurde.