

Oldřich Horáček

Über eine Eigenschaft der verallgemeinerten Lösung des Poissonschen Problems
(Vorläufige Mitteilung)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 3, 347--352

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105022>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ÜBER EINE EIGENSCHAFT DER VERALLGEMEINERTEN LÖSUNG DES

POISSONSCHEN PROBLEMS

(Vorläufige Mitteilung)

Oldřich HORÁČEK, Praha

Mit dem Symbol E_n bezeichnen wir den n -dimensionalen Euklidischen Raum mit den Koordinaten $[X_1, X_2, \dots, X_n]$; es sei Ω ein beschränktes Gebiet. Die Menge aller auf Ω unendlich differenzierbarer Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{E}(\Omega)$ die Menge aller Funktionen aus $\mathcal{E}(\Omega)$ mit kompakten Trägern in Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{D}(\Omega)$. Weiter sei $C_{loc}^{(1),1}(\Omega)$ die Menge aller stetigen Funktionen, deren erste Ableitungen auf jeder offenen Menge, deren Abschliessung in Ω liegt, die Lipschitz-Bedingung erfüllen. Ist $1 \leq \nu$, so sei $W_\nu^{(1)}(\Omega)$ der Raum aller Funktionen, die mit ihren ersten verallgemeinerten Ableitungen mit der ν -ten Potenz auf Ω integrierbar sind. Schliesslich sei $W_\nu^{(1),1}(\Omega)$ die Abschliessung von $\mathcal{D}(\Omega)$ in der Norm des Raumes $W_\nu^{(1)}(\Omega)$.

Ω wird vom Typus $\mathcal{N}^{(1),1}$ genannt, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Es existieren m Koordinatensysteme in E_n und m Funktionen a_ν , $\nu = 1, 2, \dots, m$ derart, dass jeder Punkt der Grenze mindestens in einem dieser Systeme in der Form

$$[X_{\nu 1}, X_{\nu 2}, \dots, X_{\nu n-1}, a_\nu(X_{\nu 1}, X_{\nu 2}, \dots, X_{\nu n-1})]$$

(kurz $X_n, a_n(X_n)$) geschrieben werden kann. Wir nehmen an, dass die Funktionen a_n auf der Menge

$$G_n = \{X_n \mid |X_n| < \alpha, 0 < \alpha\}$$

die Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstante k erfüllen.

2) Es existiert eine Zahl $0 < \beta \leq 1$ derart, dass die Punkte mit den Koordinaten $X_n \in G_n$, $a_n(X_n) - \beta < x_{nn} < a_n(X_n)$ innerhalb Ω und die Punkte mit den Koordinaten $X_n \in G_n$, $a_n(X_n) < x_{nn} < a_n(X_n) + \beta$ ausserhalb Ω liegen.

3) Es existiert eine Folge von Untergebieten Ω_n , $n = 1, 2, \dots$ derart, dass $\Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \dots \subset \Omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$. Dabei können die Grenzpunkte der Gebiete Ω_n in der Form $[X_n, a_{nh}(X_n)]$ geschrieben werden, wo a_{nh} in G_n unendlich differenzierbar sind, die Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstante k erfüllen und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{nh}}{\partial x_{ni}} - \frac{\partial a_n}{\partial x_{ni}} \right)^2 \right] dX_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{X_n \in G_n} |a_{nh}(X_n) - a_n(X_n)| \right) = 0,$$

Ω wird vom Typus \mathcal{M} genannt, falls $\Omega_1 = \Omega$.

Ist $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1}$, so sei $L_2(\dot{\Omega})$ der Raum aller fast überall auf Ω (d.h. fast überall auf G_n , $n = 1, 2, \dots, m$) definierten Funktionen u für die

$$\|u\|_{L_2(\dot{\Omega})} = \left(\int_{\dot{\Omega}} |u|^2 dS \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

gilt. Das Integral rechts ist hier für $v \in L_1(\dot{\Omega})$ und für beliebige Einheitsteilung $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m$ auf $\dot{\Omega}$

folgenderweise definiert:

$$\int_{\Omega} v dS = \sum_{k=1}^m \int_{G_k} v(x_k, a_k(x_k)) \varphi_k(x_k, a_k(x_k)) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_{ki}}\right)^2} dx_k.$$

Definition 1. Es sei $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1}$, $K \subset \dot{\Omega}$, K abgeschlossen. Wir sagen, dass K die Eigenschaft V hat, falls entweder $K = \emptyset$ ist, oder eine stetige nichtnegative Funktion σ auf Ω existiert, für die $\sigma \in W_n^{(1)}(\Omega)$ gilt und zu jedem $0 < \epsilon$ eine solche Umgebung \mathcal{U} von K existiert, dass auf $\mathcal{U} \cap \dot{\Omega}$ $\epsilon < \sigma$ gilt.

Ist $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1}$, $K \subset \dot{\Omega}$, so bezeichnen wir

$$\mathcal{P}(K) = \bigcup_{x_k \in G_k} ([x_k, a_k(x)] \in K).$$

Definition 2. Es sei $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1}$. Ω wird zulässig genannt, falls eine solche abgeschlossene Menge $K \subset \dot{\Omega}$ mit der Eigenschaft V existiert, dass $a_k \in C_{loc}^{(1),1}(G_k - \mathcal{P}(K))$ für $k = 1, 2, \dots, m$ gilt.

Das Problem der Existenz eines nichttrivialen zulässigen Gebietes Ω wird auf das Problem der Existenz eines σ aus der Definition 1 zurückgeführt. Wenn K einen einzigen Punkt Y enthält, so kann σ folgenderweise definiert werden:

$$\sigma(X, Y) = | \lg |X - Y| |^\alpha.$$

Hier ist $X \in \Omega$ und $\alpha < \frac{n-1}{n}$.

Satz 1. Es sei Ω zulässig, $K \subset \dot{\Omega}$ eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft V . Dann ist die Dimension von K gleich Null.

Definition 3. Es sei M abgeschlossen. Wir sagen, dass

die n -Kapazität von M gleich Null ist, falls eine solche Folge von stetigen Funktionen ψ_1, ψ_2, \dots existiert, dass $1 \equiv \psi_\ell$ auf M , $\psi_\ell \in W_n^{(1)}(E_n)$ und $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \psi_\ell = 0$ in $W_n^{(1)}(E_n)$ gilt.

Satz 2. Es sei M abgeschlossen. Dann ist die n -Kapazität von M genau dann gleich Null, wenn eine offene Kugel \mathfrak{a} , $M \subset \mathfrak{a}$ und eine stetige Funktion ρ auf $\mathfrak{a} - M$ derart existiert, dass $\rho \in W_n^{(1)}(\mathfrak{a})$ und dass zu jeder Zahl $0 < c$ eine solche Umgebung \mathcal{U} von M existiert, dass auf $\mathcal{U} \cap \mathfrak{a}$ $c < \rho$ gilt.

Ist $n = 2$, so sind die Mengen mit der Eigenschaft V aus der Definition 1 und deswegen auch die zulässigen Gebiete genügend beschrieben, denn der Begriff der 2-Kapazität ist mit dem in der Theorie partieller Differentialgleichungen benutzten Kapazitätsbegriff identisch.

Ein linearer Differenzialoperator zweiter Ordnung

$$D = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + b$$

wird symmetrisch elliptisch auf Ω genannt, falls $a^{ij} = a^{ji}$ auf Ω gilt und falls eine solche Konstante $0 < c$ existiert, dass

$$c \delta^{ij} \xi_i \xi_j \equiv a^{ij} \xi_i \xi_j,$$

(wobei $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \in E_n$ ist), und $0 \equiv b$ auf Ω gilt. Sind Funktionen $u, v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ gegeben, setzen wir

$$(u, v)_D = \int_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} b u v d\Omega.$$

Ist $f \in L_2(\Omega)$, so nennen wir $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ eine

verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv = f$ auf Ω , $v = 0$ auf $\dot{\Omega}$, falls für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(v, \varphi)_{\mathcal{D}} = (f, \varphi)_{L_2(\Omega)}$$

und $v \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ ist.

Ist $\Omega \in \mathcal{M}^{(0),1}$, so existiert eine stetige lineare Abbildung R des Raumes $L_2(\Omega)$ in den Raum $L_2(\dot{\Omega})$, die jedem $f \in L_2(\Omega)$ die verallgemeinerten Ableitung der verallgemeinerten Lösung des Poissonschen Problems $Dv = f$ auf Ω , $v = 0$ auf $\dot{\Omega}$ nach der ausseren Konormal $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ zuordnet. Ist $\Omega \in \mathcal{M}$, so ist $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \alpha^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} n_i$.

Satz 3. Es sei $\Omega \in \mathcal{M}^{(0),1}$, $f \in L_2(\Omega)$, v_h sei die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv_h = f$ auf Ω_h , $v_h = 0$ auf $\dot{\Omega}_h$; v sei die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv = f$ auf Ω , $v = 0$ auf $\dot{\Omega}$. Dann $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\partial v_h}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ schwach in $L_2(\dot{\Omega})$.

Satz 4. Es sei Ω zulässig, $f \in L_2(\Omega)$, v_h sei die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv_h = f$ auf Ω_h , $v_h = 0$ auf $\dot{\Omega}_h$. Dann existiert eine Konstante $0 < c$ und eine natürliche Zahl h_0 derart, dass für $h_0 \leq h$

$$\int_{\Delta_h} \sigma \left(\frac{\partial v_h}{\partial \nu} \right)^2 dS \leq c$$

gilt.

Satz 5. Es sei Ω zulässig, $f \in L_2(\Omega)$, v_h sei

die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv_h = f$ auf Ω_h , $v_h = 0$ auf $\dot{\Omega}_h$; v sei die verallgemeinerte Lösung des Poissonschen Problems $Dv = f$ auf Ω , $v = 0$ auf $\dot{\Omega}$. Dann $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\partial v_h}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ in $L_2(\dot{\Omega})$.

Ist $\varphi \in W_2^{(1)}(\Omega)$, so nennen wir ein $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ die verallgemeinerte Lösung des Dirichletschen Problems $Du = 0$ auf Ω , $u = \varphi$ auf $\dot{\Omega}$, falls für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(u, \varphi)_D = 0$$

und $u - \varphi \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$ ist.

Aus dem Satz 5 ergibt sich die Eindeutigkeit der verallgemeinerten Lösung des Dirichletschen Problems, wenn die Randbedingungen schwach in $L_2(\dot{\Omega})$ konvergieren.

L i t e r a t u r :

J. NEČAS, O řešeních eliptických diferenciálních rovnic v čáстных производных второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле. Czechoslovak Mathematical Journal, 10, 1950, 283-298.

(Eingegangen 20.V.1965)