

Václav Havel

Freie Erweiterungen von Schemen n -ten Grades

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 6 (1965), No. 4, 443--448

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105036>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

FREIE ERWEITERUNGEN VON SCHEMEN N-ten GRADES

Václav HAVEL, Brno

J. Kolář hat in [3] nichtdegenerierte Schemen vierten Grades zur Konstruktion gewisser abgeschwächter affiner Räume verwendet, wobei er im wesentlichen eine Analogie der bekannten freien Erweiterungen von Inzidenzstrukturen ([2], [4]) ausgenutzt hat. Ich möchte nun diese Analogie ausführlicher untersuchen. Dabei soll die Erörterung von Herrn Professor Pickert in [4], S. 12-18 als Vorbild dienen.

Im weiteren sei n eine feste natürliche Zahl, $n \geq 4$. Unter einem Schema (n-ten Grades) verstehen wir ein Paar $\mathcal{S} = (P, E)$, wo P eine Menge mit $\text{card } P \geq n$ ist, deren Elemente Punkte heissen sollen, und E eine Menge von n -punktiger Untermengen von P , der sog. Ebenen, wobei zwei verschiedene Ebenen stets höchstens $n - 2$ gemeinsame Punkte haben. Wenn dabei E aus sämtlichen n -punktigen Untermengen von P besteht, so nennen wir \mathcal{S} vollständig. Ist insbesondere $\text{card } P = n$, $\text{card } E = 1$, so soll \mathcal{S} degenerierend heissen, in den übrigen Fällen soll \mathcal{S} nichtdegeneriert heissen.

Sind $\mathcal{S} = (P, E)$, $\mathcal{S}' = (P', E')$ zwei Schemen, für welche $P \subseteq P'$, $E \subseteq E'$ gilt, so heisst \mathcal{S} ein Unterschema von \mathcal{S}' ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$). Ist $(\mathcal{S}_\gamma)_{\gamma \in I}$ eine Familie von Schemen $\mathcal{S}_\gamma = (P_\gamma, E_\gamma)$, dann schreiben wir $\bigcup_{\gamma \in I} \mathcal{S}_\gamma = (\bigcup_{\gamma \in I} P_\gamma, \bigcup_{\gamma \in I} E_\gamma)$,

$\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{P}} \mathcal{F} = (\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{P}} P_{\mathcal{F}}, \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{P}} E_{\mathcal{F}})$; bei geeigneten Bedingungen sind $\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{P}} \mathcal{F}$, $\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{P}} \mathcal{F}$ wieder Schemen.

Es sei $\overline{\mathcal{F}} = (\overline{P}, \overline{E})$ ein vollständiges Schema mit einem Unterschema $\mathcal{F} = (P, E)$. Der Durchschnitt von sämtlichen Unterschemen \mathcal{F}^* , $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^* \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ ist ein Schema, das $[\mathcal{F}]$ bezeichnet wird; wir sagen auch, dass $[\mathcal{F}]$ in $\overline{\mathcal{F}}$ durch \mathcal{F} erzeugt wird. $[\mathcal{F}]$ kann man folgendermassen rekursiv konstruieren: Es sei E^* die Menge von sämtlichen Ebenen aus $\overline{\mathcal{F}}$, welche mindestens $n-1$ nicht in derselben Ebene von \mathcal{F} liegenden Punkte von \mathcal{F} enthalten, während P^+ alle nicht in \mathcal{F} liegenden Punkte sämtlicher Ebenen von E^* enthalten soll. Dann ist $\mathcal{F}^+ = (P \cup P^+, E \cup E^+)$ wieder ein Schema, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^+ \subseteq \overline{\mathcal{F}}$. Wir bilden eine Folge $(\overline{\mathcal{F}}_i)_{i=0}^{\infty}$, wo $\overline{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}$ und $\overline{\mathcal{F}}_{i+1} = \overline{\mathcal{F}}_i^+$ ist ($i = 0, 1, 2, \dots$) und bekommen $\bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{\mathcal{F}}_i = [\mathcal{F}]$.

Es sei $\mathcal{F} = (P, E)$ ein nichtdegeneriertes Schema. Wir untersuchen das System \mathcal{S} von sämtlichen $(n-1)$ -punktigen Untermengen von \mathcal{F} , welche nicht in derselben Ebene von \mathcal{F} liegen. Weiter bezeichnen wir mit P' eine mit P fremde Menge, für welche eine Bijektion $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow P'$ existiert, und mit E' die Menge von sämtlichen n -punktigen Untermengen $X \cup \{\sigma X\}$, $X \in \mathcal{S}$. Offensichtlich ist $\mathcal{F}' = (P \cup P', E \cup E')$ ein Schema, $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$. Weiter setzen wir $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{F}_i'$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) und bekommen ein vollständiges Schema $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}(\mathcal{F})$, das wir eine vollständige freie Erweiterung von \mathcal{F} nennen wollen.

Unter einer surjektiven Abbildung zwischen den Schemen $\mathcal{F} = (P, E)$, $\mathcal{F}' = (P', E')$ verstehen wir ein Paar

$\sigma = (\sigma^P, \sigma^E)$ von surjektiven Abbildungen $\sigma^P : P \rightarrow P'$,
 $\sigma^E : E \rightarrow E'$. Gilt dabei für $x \in y$, $x \in P$, $y \in E$ stets
 $\sigma^P x \in \sigma^E y$, so heisst σ ein Epimorphismus zwischen \mathcal{Y} ,
 \mathcal{Y}' . Wenn bei einem solchen Epimorphismus beide Schemen ein
 gemeinsames Unterschema \mathcal{Y}'' haben und wenn σ auf \mathcal{Y}'' ei-
 nen identischen Automorphismus hervorruft, so sagt man, dass
 $\sigma : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$ ein Epimorphismus bezüglich \mathcal{Y}'' ist.

Satz 1. Es sei $\mathcal{Y} = (P, E)$ ein nichtdegeneriertes Schema und
 $\bar{\mathcal{Y}} = (\bar{P}, \bar{E})$ ein vollständiges Schema, das durch \mathcal{Y} erzeugt
 wird. $\bar{\mathcal{Y}}$ und $\mathcal{F}(\mathcal{Y}) = (\bar{P}, \bar{E})$ entsprechen einander in einem
 Isomorphismus bezüglich \mathcal{Y} genau dann, wenn zu jedem durch \mathcal{Y}
 erzeugten vollständigen Schema $\mathcal{Y}^* = (P^*, E^*)$ ein Epimorphi-
 smus $\sigma : \bar{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}^*$ bezüglich \mathcal{Y} existiert.

Beweis. a) Die Bedingung ist notwendig: Dazu genügt es zu
 zeigen, dass zu jedem von \mathcal{Y} erzeugten vollständigen Schema
 \mathcal{Y}^* ein Epimorphismus $\sigma : \mathcal{F}(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Y}^*$ bezüglich \mathcal{Y}
 vorhanden ist. Es sei $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ bzw. \mathcal{Y}^* durch zugehörige
 Folgen $(\mathcal{Y}_i)_{i=0}^{\infty}$ bzw. $(\mathcal{Y}_i^*)_{i=0}^{\infty}$ gebildet. Wir erklären
 rekursiv die surjektiven Abbildungen $\mathcal{G}_i : \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathcal{Y}_i^*$ ($i =$
 $= 0, 1, 2, \dots$). Es sei erstens \mathcal{G}_0 die identische Abbildung
 auf $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_0^*$. Zweitens setzen wir voraus, dass
 $\mathcal{G}_i : \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathcal{Y}_i^*$ für ein gewisses i schon vorhanden ist;
 ist für eine $(n-1)$ -punktige nicht in derselben Ebene von \mathcal{Y}_i
 liegende Punktmenge X auch $\mathcal{G}_i^{P_i} X$ $(n-1)$ -punktig, so zuord-
 nen wir für $\mathcal{G}_{i+1}^{E_{i+1}}$ das Bild der Ebene $Y \supset X$ von \mathcal{Y}_{i+1}
 als die Ebene $Y^* \supset \mathcal{G}_i^{P_i} X$ von \mathcal{Y}_{i+1}^* , während wir für
 $\mathcal{G}_{i+1}^{P_{i+1}}$ dem neuen Punkte von Y den neuen Punkt von Y^*

zuordnen. Ist aber $\mathcal{G}_i^{P_i} X$ nicht $(n-1)$ -punktig, so soll der Ebene Y eine willkürliche durch $\mathcal{G}_i^{P_i} X$ gehende Ebene von \mathcal{L}_{i+1} entsprechen. Die gemeinsame Fortsetzung \mathcal{G} aller \mathcal{G}_i ist eindeutig bestimmt; \mathcal{G} ist der gewünschte Epimorphismus zwischen $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ und \mathcal{G}^* bezüglich \mathcal{Y} .

b) Die Bedingung ist hinreichend: Es sei $\bar{\mathcal{F}}$ ein solches vollständiges Schema, für welches ein Epimorphismus $\psi : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ existiert. Nach a) gibt es einen Epimorphismus $\mathcal{G} : \mathcal{F}(\mathcal{Y}) \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$. Durch vollständige Induktion folgt nun, dass ψ auf $\bar{\mathcal{F}}_i$ bzw. \mathcal{G} auf \mathcal{L}_i einen Epimorphismus ψ_i bzw. \mathcal{G}_i bezüglich \mathcal{Y} hervorruft, wobei $\psi_i \circ \mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i \circ \psi_i$ eine identische Abbildung ist. Daraus folgt dann, dass sämtliche ψ_i , \mathcal{G}_i Isomorphismen sind. Für $i = 0$ ist die vorangehende Behauptung richtig. Gilt sie für ein gewisses i , so untersuchen wir eine Ebene Y , welche zu $\bar{\mathcal{F}}_{i+1}$, nicht aber zu $\bar{\mathcal{F}}_i$ gehört. Dann gibt es in $\bar{\mathcal{F}}_i$ eine $(n-1)$ -punktige Menge $X \subset Y$ und nach den Voraussetzungen ist auch $\psi_i^{E_i} X$ $(n-1)$ -punktig, so dass $\psi^{E_i} Y$ durch die Menge $\psi^{E_i} X \subset \psi^{E_i} Y$ eindeutig bestimmt ist. Die Ebene $\mathcal{G}^{E_i}(\psi^{E_i} Y)$ ist also durch die Menge $\mathcal{G}^{E_i}(\psi^{E_i} X) \subset \psi^{E_i}(\psi^{E_i} Y)$, d.h. durch die Menge X eindeutig bestimmt, so dass $\mathcal{G}^{E_i}(\psi^{E_i} Y) = Y$ ist. Ein ähnlicher Schluss folgt beim Austausch von \mathcal{G} , ψ . Das Ende des Beweises unserer Hilfsbehauptung ist offensichtlich. Es ist also ψ ein Isomorphismus zwischen $\bar{\mathcal{F}}$ und $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$ bezüglich \mathcal{Y} , w.z.b.w.

Ein Schema $\mathcal{Y}' = (P', E')$, $\mathcal{Y} \leq \mathcal{Y}' \leq \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ heisst eine freie Erweiterung eines gegebenen Schemas $\mathcal{Y} = (P, E)$, wenn mit jeder nicht zu \mathcal{L}_i gehörenden Ebene von \mathcal{L}_{i+1}

auch ihre zu \mathcal{L}_i gehörenden Punkte sämtlich in \mathcal{S}' liegen.

Satz 2. Es seien $\mathcal{S} = (P, E)$, $\mathcal{S}' = (P', E')$, $\mathcal{S}'' = (P'', E'')$ drei Schemen, $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}' \leq \mathcal{S}'' \leq \mathcal{F}(\mathcal{S})$, wobei \mathcal{S}' die freie Erweiterung von \mathcal{S} ist. \mathcal{S}'' ist eine freie Erweiterung von \mathcal{S} dann und nur dann, wenn sie eine freie Erweiterung von \mathcal{S}' ist.

Beweis. a) Es seien $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, $\mathcal{F}(\mathcal{S}')$ durch entsprechende Folgen $(\mathcal{L}_i)_{i=0}^{\infty}$, $(\mathcal{L}'_i)_{i=0}^{\infty}$ gebildet. Offensichtlich ist $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$. Gilt $\mathcal{L}'_i \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$; so folgt auch $\mathcal{L}'_{i+1} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$, denn bedeutet k die kleinste Zahl, für welche die in \mathcal{L}'_i liegenden Punkte einer Ebene von \mathcal{L}'_{i+1} sämtlich zu \mathcal{L}_k gehören, so liegt diese Ebene auch in \mathcal{L}_{k+1} . Nach vollständiger Induktion gilt also $\mathcal{L}'_i \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S})$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) und damit $\mathcal{F}(\mathcal{S}') = \mathcal{F}(\mathcal{S})$. Es sei \mathcal{S}'' eine freie Erweiterung von \mathcal{S} . Wenn aber eine Ebene Y von \mathcal{S}'' nicht in \mathcal{S}' liegt, so gibt es eine Zahl h so, dass $n - 1$ Punkte von Y zu \mathcal{L}_h gehören und der übriggebliebene nicht, so dass die Ebene zu \mathcal{L}_{h+1} gehört. Daraus folgt dann, dass diese $n - 1$ Punkte schon in \mathcal{S}'' liegen müssen. Also ist \mathcal{S}'' eine freie Erweiterung von \mathcal{S}' .

b) Es sei nun \mathcal{S}'' eine freie Erweiterung von \mathcal{S}' . Wir wählen eine Ebene von \mathcal{S}'' , welche in \mathcal{L}_{m+1} nicht aber in \mathcal{L}_m liegt. Gehört diese Ebene nicht zu \mathcal{S}' , so gibt es eine Zahl t so, dass $n - 1$ Punkte dieser Ebene in \mathcal{L}'_t liegen und der übriggebliebene nicht, so dass die Ebene zu \mathcal{L}'_{t+1} gehört. Nach den Voraussetzungen über \mathcal{S}' und \mathcal{S}'' liegen dann die betreffenden $n - 1$ Punkte ebenfalls in \mathcal{S}'' und

\mathcal{J}^n erweist sich als eine freie Erweiterung von \mathcal{J} .

L i t e r a t u r :

- [1] R.H. BRUCK, A survey of binary systems, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
- [2] M. HALL, Projective planes, Trans.Am.Math.Soc.54(1943), 229-277.
- [3] J. KOLÁŘ, On one Lenz's problem on the independence of the affine space axioms, CMUC 6,3(1965),339-346.
- [4] G. PICKERT, Projektive Ebenen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

(Received May 13, 1965)