

I. I. Aleksandrov

О представлении конечно-аддитивной функции множества

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 7 (1966), No. 1, 85--91

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105042>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОНЕЧНО-АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

И.И. Александров, Арзамас

J. Fiala [1] указал теорему о представлении меры через интеграл от функции из пространства Орлича. Ниже этот результат обобщается на банаховы функциональные пространства [2], [3]. Приведем необходимые определения, следуя [2].

$(\Delta, \mathcal{L}, \mu)$ - пространство с вполне σ -конечной полной мерой. Фиксирована последовательность Δ_n , $0 < \mu(\Delta_n) < \infty$,

$$\Delta_n \subset \Delta_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Множество $e \in \mathcal{L}$ называется ограниченным, если $e \subset \Delta_n$ при некотором n . На множестве измеримых комплексных функций $f(x)$, $x \in \Delta$ задана монотонная норма $\rho(f)$,

$0 \leq \rho(f) \leq \infty$. Дополнительно предполагается следующее. Если e - ограниченное множество, то $\rho(\chi_e) < \infty$.

Для каждого ограниченного множества e существует конечная постоянная \mathcal{A}_e такая, что $\int |f| d\mu \leq \mathcal{A}_e \rho(f)$

для любой f . Если $0 \leq f_n \uparrow f$ почти всюду, то $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$. \mathfrak{X} - множество всех функций с $\rho(f) < \infty$.

$\mathfrak{X} - \mathcal{B}$ - пространство с нормой $\rho(f)$. Это пространство и называется банаховым функциональным пространством.

Рассмотрим множество комплексных измеримых функций $f(x)$ таких, что f ограничена на некотором ограниченном множестве и обращается в нуль вне его. Замыкание множества таких функций в \mathfrak{X} обозначается через \mathfrak{X}^b .

\mathfrak{X}^χ - подпространство \mathfrak{X} , состоящее из таких функций f , что $e_m \downarrow \theta / \theta$ - пустое множество / влечет $\rho(f \chi_{e_m}) \downarrow 0$. Ассоциированное пространство \mathfrak{X}' порождается нормой

$$\rho'(f) = \sup \int |f_j| d\mu, \rho(g) \leq 1.$$

Пусть $\mathcal{U} \mathcal{B}$ - пространство или же пространство скаляров. Если $y \in \mathcal{U}$, то $|y|$ означает норму y или модуль соответственно. Пусть ν - конечно-аддитивная функция, отображающая \mathcal{L} в \mathcal{U} , причем $\mu(e) = 0$ влечет $\nu(e) = 0$. Пусть $\tau = \{e_i\}$ произвольный конечный класс измеримых попарно не пересекающихся множеств.

Положим $R(\nu) = \sup_{\tau} \sup_{\rho(\alpha) \leq 1} |\sum \alpha_i \nu(e_i)|$, где

$$\alpha = \alpha(x) = \sum \alpha_i \chi_{e_i}(x), \alpha_i - \text{скаляры. Пусть } \alpha(x)$$

такова, что при некотором $i = m$, $\rho(\chi_{e_m}) = \infty$.

Поскольку $\rho(\alpha_m \chi_{e_m}) \leq \rho(\alpha)$, то $\rho(\alpha) \leq 1$ влечет $\alpha_m = 0$.

Поэтому, определяя $R(\nu)$, мы можем считать, что если $e_i \in \tau$, то $\rho(\chi_{e_i}) < \infty$. Пусть $\nu(\nu)$ - полная вариация функции ν [4], стр. 111.

Лемма 1. Если функция ν скалярна, то $R[\nu(\nu)] = R(\nu)$.

Доказательство. Пусть $\text{sgn}(\chi e^{i\theta})$ равно $e^{i\theta}$, если $\chi \neq 0$, и равно нулю при $\chi = 0$. Поскольку $\rho(\sum \alpha_i \text{sgn}[\alpha_i \nu(e_i)] \chi_{e_i}) = \rho(\alpha)$, то $\sup_{\rho(\alpha) \leq 1} \sum \alpha_i \nu(e_i) \leq R(\nu)$ и $\sup_{\tau} \sup_{\rho(\alpha) \leq 1} \sum |\alpha_i \nu(e_i)| \leq R(\nu)$.

Обратное неравенство очевидно. Еще раз учитывая, что

$\rho(\alpha) = \rho(|\alpha|)$, получим

$$R(\nu) = \sup_{\tau} \inf_{\rho(\alpha) \leq 1} \sum_{\tau} \alpha_i |\nu(e_i)|, \quad \alpha_i > 0.$$

Ясно, что $R(\nu) \leq R[\nu(\nu)]$; если $R(\nu) = \infty$,

то лемма верна.

Пусть $R(\nu) < \infty$. Возьмем $\tau = \{e_0\}$, $e \in e_0, \mu(e) > 0$,

$$\text{и } \alpha(x) = \frac{\chi_e(x)}{\rho(\chi_e)}.$$

Тогда

$$\rho(\alpha) = 1, \quad |\nu(e)| / \rho(\chi_e) \leq R(\nu),$$

$$|\nu(e)| \leq R(\nu) \rho(\chi_{e_0}) < \infty.$$

Это значит, что ν ограничена на e_0 , а тогда

$$\nu(\nu, e_0) < \infty.$$

Фиксируем теперь $\tau = \{e_i\}$, $\alpha = \alpha(x) = \sum_{\tau} \alpha_i \chi_{e_i}(x)$,

$\rho(\alpha) \leq 1$, и $\varepsilon > 0$. Для каждого i существует конечный класс множеств $\{a_{ik}\}$ такой, что $a_{ik} \subset e_i$, $k = 1, 2, \dots, k(i)$ и $\nu(\nu, e_i) < \sum_{k=1}^{k(i)} |\nu(a_{ik})| + \varepsilon / \sum_{\tau} \alpha_i$.

Далее, $\sum_{\tau} \alpha_i \nu(\nu, e_i) < \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{k(i)} \alpha_i |\nu(a_{ik})| + \varepsilon \leq R(\nu) + \varepsilon$.

Поскольку ε произвольно, $R[\nu(\nu)] \leq R(\nu)$.

Пусть S множество функций $f(x)$ вида $f = \sum_{\tau} \alpha_i \chi_{e_i}$,

$e_i \in \Lambda$ и ограничены. S плотно в \mathcal{X}^b . По существу это доказано в [3], стр. 155, хотя явно и не сформулировано.

Лемма 2. Если $f \in \mathcal{X}^b$, то $\int |f(x)| d\nu(\nu) \leq \rho(f) R[\nu(\nu)]$.

Доказательство. Обозначим $\nu = \nu(\nu)$. Если $R(\nu) = \infty$,

то лемма верна.

Пусть $R(\nu) < \infty$. Сначала примем, что $f \in S$, $f =$

$$= \sum_{\tau} \beta_i \chi_{e_i}. \quad \text{Поскольку } \rho[f / \rho(f)] = 1, \quad \text{то}$$

$$\int \frac{|f|}{\rho(f)} dv = \sum \beta_i |v(e_i)| / \rho(f) \leq R(v),$$

$$\int |f| dv \leq \rho(f) R(v).$$

Пусть теперь $f \in \mathfrak{X}^b$. Возьмем $f_n \in S$, $n = 1, 2, \dots$,
 $\lim_n \rho(f - f_n) = 0$. Для $\sigma > 0$ положим $e_n(\sigma) =$
 $= \{x : |f(x) - f_n(x)| > \sigma\}$. $\rho(f - f_n) \geq \rho(|f - f_n| \chi_{e_n(\sigma)}) \geq$
 $\geq \sigma \rho(\chi_{e_n(\sigma)})$, поэтому $\lim_n \rho(\chi_{e_n(\sigma)}) = 0$. Но
 $v[e_n(\sigma)] \leq \rho(\chi_{e_n(\sigma)})$, а тогда $\lim_n v[e_n(\sigma)] = 0$.

Поскольку f и f_n измеримы, то $e_n(\sigma) \in \Lambda$. В этом
 случае $v^*[e_n(\sigma)] = v[e_n(\sigma)]$ [определение v^*
 см. в [4], стр. 114]; следовательно, f_n сходится к f
 по мере v , [4], стр. 115. Кроме того, по первой части до-
 казательства,

$$\int |f_n - f_m| dv \leq \rho(f_n - f_m) R(v) \text{ и } \lim_{m,n} \int |f_n - f_m| dv = 0.$$

Тогда существует $\lim_n \int |f_n| dv = \int |f| dv$ [4], стр. 127.

Теперь осталось перейти к пределу в неравенстве

$$\int |f_n| dv \leq \rho(f_n) R(v),$$

которые верно по первой части доказательства.

Следствие. Если ν скалярна, то $\int |f| dv(\nu) \leq \rho(f) R(\nu)$.

Теорема 1. Соотношение $\mathcal{J}(f) = \int f d\nu$, где $R(\nu) < \infty$,
 дает аналитическое представление линейного функционала в \mathfrak{X}^b ,
 причем $\|\mathcal{J}\| = R(\nu)$.

Доказательство. Из леммы 2 и $|\int f d\nu| \leq \int |f| dv(\nu)$

следует, что $\int f d\nu$ является линейным функционалом в \mathfrak{X}^b .

Пусть теперь $\mathcal{J}(f)$ - линейный функционал в \mathfrak{X}^b . Введем

функцию множества, полагая $\nu(e) = \mathcal{J}(\chi_e)$, если

$\rho(\chi_e) < \infty$, и $\nu(e) = \infty$ в противном случае. Пусть

$$f \in S, \quad f = \sum_{\tau} \alpha_i \chi_{e_i}, \quad \text{тогда } \mathcal{J}(f) = \\ = \sum_{\tau} \alpha_i \nu(e_i) = \int f d\nu.$$

Учитывая лемму 2, получим $\|\mathcal{J}\| = \sup_{f \in S, \rho(f) \leq 1} |\mathcal{J}(f)|$.

Теперь

$$R(\nu) = \sup_{\tau} \sup_{\rho(f) \leq 1} \left| \sum_{\tau} \alpha_i \nu(e_i) \right| = \sup_{f \in S, \rho(f) \leq 1} \left| \int f d\nu \right| = \|\mathcal{J}\|.$$

Пусть $f = \chi^b$, возьмем $f_n \in S, n = 1, 2, \dots, \lim_n \rho(f_n - f) = 0$.

Как в лемме 2, можно получить $\int f d\nu = \lim_n \int f_n d\nu$.

Но $\int f_n d\nu = \mathcal{J}(f_n) \rightarrow \mathcal{J}(f)$ при $n \rightarrow \infty$, значит $\mathcal{J}(f) = \int f d\nu$.

Теорема 2. Пусть ν - конечно-аддитивная функция, определенная на Λ . Если для любого ограниченного множества e $\nu(e) = \int_e g d\mu, g \in \mathcal{X}'$, то $R(\nu) < \infty$.

Если $\mathcal{X}^b = \mathcal{X}^{\tau}$, то верно и обратное: $R(\nu) < \infty$ влечет существование функции $g \in \mathcal{X}'$ такой, что $\nu(e) = \int_e g d\mu$ для любого ограниченного e [и даже такого, что $\rho(\chi_e) < \infty$]. При этом $R(\nu) = \rho'(g)$.

Доказательство. Пусть $\nu(e) = \int_e g d\mu, g \in \mathcal{X}'$. Известно, [3], стр. 158, что

$$\rho'(g) = \sup_{\rho(f) \leq 1} \int |fg| d\mu, \quad f \in \mathcal{X}^b.$$

Поскольку S плотно в \mathcal{X}^b , то $\rho'(g) =$

$$= \sup_{\rho(f) \leq 1} \int |fg| d\mu, \quad f \in S.$$

Теперь $R(\nu) = \sup_{\tau} \sup_{\rho(\alpha) \leq 1} \left| \sum_{\tau} \alpha_i \int_{e_i} g d\mu \right| \leq$

$$\leq \sup_{\tau} \sup_{\rho(\alpha) \leq 1} \sum_{\tau} \int_{e_i} |\alpha_i g| d\mu = \sup_{\alpha \in S, \rho(\alpha) \leq 1} \int |\alpha(x) g(x)| d\mu = \\ = \rho'(g) < \infty.$$

Пусть теперь $R(\nu) < \infty$. По теореме 1, $\mathcal{J}(f) = \int f d\nu$ является аналитическим представлением линейного функционала

в \mathcal{X}^b . Для случая $\mathcal{X}^b = \mathcal{X}^x$ в [2], стр. 16, дано представление $\mathcal{V}(f) = \int f g d\mu$, $g \in \mathcal{X}'$. Отсюда, если $\chi_e \in \mathcal{X}^b$, то $\nu(e) = \int \chi_e d\nu = \int g d\mu$.

В частности, это верно для ограниченного e .

Следствие. Если μ вполне конечна, то представление

$\nu(e) = \int g d\mu$ имеет место для всех измеримых e .

Действительно, если мы примем $\Delta_n = \Delta$, $n = 1, 2, \dots$, то каждое измеримое множество будет ограниченным.

Если ν счетно-аддитивна, т.е. является обобщенной мерой, то можно получить представление для ее полной вариации $\nu(\nu)$.

Теорема 3. Для того, чтобы полная вариация обобщенной меры ν допускала представление $\nu(\nu, e) = \int_e |g| d\mu$, $g \in \mathcal{X}'$, $e \in \mathcal{L}$, необходимо, а если $\mathcal{X}^b = \mathcal{X}^x$, то и достаточно, чтобы $R(\nu) < \infty$.

Необходимость. Пусть $\nu(\nu, e) = \int_e |g| d\mu$. Интеграл может быть равен ∞ , но он существует [4], стр. 107. Как в теореме 2, можно получить $R[\nu(\nu)] = \rho'(g) < \infty$. Осталось применить лемму 1.

достаточность. Пусть $R(\nu) < \infty$, $\Delta_n \uparrow \Delta$, $0 < \mu(\Delta_n) < \infty$, $0 < \rho(\chi_{\Delta_n}) < \infty$. Положим $e_1 = \Delta_1$, $e_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$. По следствию теоремы 2, существуют $g_n \in \mathcal{X}'(e_n, \mu)$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $\nu(\nu, e) = \int_e g_n d\mu$, $e \subset e_n$, $g_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Теперь пусть $e \in \mathcal{L}$. Тогда $\nu(\nu, e) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\nu, e_n \cap e) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{e_n \cap e} g_n d\mu$.

Положим $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. При любом m , $\sum_{n=1}^m g_n \in \mathcal{X}'(\Delta_m, \mu)$, тогда $\rho'(\sum_{n=1}^m g_n) \leq R(\nu) < \infty$, поэтому

$\rho'(g) < \infty$. Из $g \geq 0$ следует $g = |g|$ и
 $\nu(\nu, \varepsilon) = \int_{\varepsilon} g d\mu$.

Автор благодарен Ю.И. Грибанову, который прочитал рукопись и сделал ряд полезных замечаний.

Л и т е р а т у р а :

- [1] J. FIALA, Representations of generalized measures by integrals. *Comm.Math.Univ.Carolinae* , 4,4 (1963),153-156.
- [2] W. LUXEMBURG, *Banach function spaces*. Delft,1955.
- [3] W. LUXEMBURG and A. ZAAANEN, Compactness of integral operators in Banach function spaces. *Math. Annalen*, 149(1963),No 2,150-180.
- [4] Н. ДАНФОРД и Дж. ШВАРЦ, *Линейные операторы*. ИИЛ,1962.

(Received July, 5, 1965)