

Oldřich Horáček; Rudolf Výborný

Über eine fastlineare partielle Differentialgleichung von nichthyperbolischen Typus (Vorläufige Mitteilung)

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 7 (1966), No. 3, 261--264

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105059>

## Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ÜBER EINE FASTLINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNG VOM  
NICHYPERBOLISCHEN TYPUS

Oldřich HORÁČEK, Rudolf VÍBORŇ, Praha

(Vorläufige Mitteilung)

Es sei  $\tilde{f}$  eine auf dem Gebiet  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$  definierte Funktion. Unter einer Lösung der Differentialgleichung  $y' = \tilde{f}(x, y)$ ,  $y(0) = b$ ,  $0 \leq b$  verstehen wir eine auf einem Intervall  $\langle 0, \tilde{A} \rangle$ , wo  $0 < \tilde{A} < +\infty$  ist, stetige Funktion  $y(x)$ ,  $y(0) = b$ , die auf  $(0, \tilde{A})$  die Gleichung  $y' = \tilde{f}(x, y)$  erfüllt.

Weiter sei  $f$  eine nichtnegative stetige Funktion auf  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$  die folgende Eigenschaften hat:

- (i)  $f(\tilde{z}, 0) = 0$ ,  $f(\tilde{z}, \varphi) > 0$  auf  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ ;
- (ii) für  $\tilde{z} \in (0, +\infty)$ ,  $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2$  ist  $f(\tilde{z}, \varphi_1) < f(\tilde{z}, \varphi_2)$ ;
- (iii) es gibt ein  $\varepsilon_0 > 0$  und eine Konstante  $C > 0$  so, dass die Differentialgleichung  $\varphi' = Cf(\tilde{z}, \varphi)$ ,  $\varphi(0) = \varepsilon_0$  auf dem Intervall  $\langle 0, A \rangle$  mit  $A > 0$  wenigstens eine Lösung hat;
- (iv) im Intervall  $\langle 0, A \rangle$  existiert höchstens eine Lösung der Differentialgleichung  $\varphi' = Cf(\tilde{z}, \varphi)$ ,  $\varphi(0) = 0$ .

Es sei  $G$  ein Gebiet in  $E_n$  und es existiere auf  $\bar{G}$  eine Funktion  $\tau$ , für die folgendes gilt:

- (j)  $\tau = 0$  auf  $\dot{G}$ ,  $\tau > 0$  auf  $G$ ;

(jj)  $\tau$  hat auf  $\bar{G}$  stetige partielle Ableitungen erster und auf  $G$  zweiter Ordnung;

(jjj) auf  $G$  gilt die Ungleichung  $0 < m \leq |\text{grad } \tau| \leq M$ .

Endlich sei  $B$  eine positive stetige Funktion auf  $(0, +\infty)$ , für die

$$\int_0^{\tau} B(s) ds < +\infty$$

ist.

Mit einer zweimal differenzierbaren Funktion  $u$  bezeichne man

$$E(u) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, u, \text{grad } u) u_{x_i} x_j - a(x, u, \text{grad } u).$$

Satz 1. Es sei  $u$  eine auf  $\bar{G}$  stetige Funktion, die auf  $G$  beschränkte Ableitungen zweiter Ordnung hat:

$|u_{x_i} x_j| \leq K$ . Es sei  $y \in \dot{G}$ . Weiter sei  $E(u) \geq 0$ ,  $a(x, u, 0) \geq 0$ , für  $x \in \bar{G}$ ,  $x + y$  gelte  $u(x) < u(y)$ ,

$$\liminf_{x \rightarrow y} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, u, 0) \tau_{x_i} \tau_{x_j} = \beta > 0,$$

die Quadratform  $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, u, 0) \lambda_i \lambda_j$  sei positiv definit oder semidefinit. Weiter setzen wir voraus, dass die Ungleichungen

$$|a_{ij}(x, u, 0) - a_{ij}(x, u, \text{grad } u)| \leq f(\tau(x), |\text{grad } u|),$$

$$a(x, u, 0) - a(x, u, \text{grad } u) \leq f(\tau(x), |\text{grad } u|),$$

$$-\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, u, 0) < B(\tau(x))$$

gelten, wo die Funktionen  $f$ ,  $\tau$ ,  $B$  die oben erwähnten Bedingungen erfüllen, und dass die Konstante  $C$  aus (iii) grösser als  $\frac{1}{\beta} (m^2 K + 1) M$  ist. Dann ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in \bar{G}}} \sup \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|} < 0.$$

Hiervon folgt leicht der Eindeutigkeitsatz für die Lösung der gemischten Aufgabe für eine fastlineare elliptische Gleichung.

**Satz 2.** Es sei  $u$  eine auf  $\bar{G}$  stetige Lösung der Gleichung  $E(u) = 0$ , die auf  $G$  stetige beschränkte Ableitungen zweiter Ordnung besitzt:  $|u_{x_i x_j}| \leq K$ . Weiter sei  $\text{sign } u \cdot a(x, u, 0) \geq 0$  für  $x \in \bar{G}$ ,

$$\liminf_{x \rightarrow y} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, 0) \tau_{x_i} \tau_{x_j} = \beta > 0$$

und Quadratform  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, 0) \lambda_i \lambda_j$  sei positiv definit. Wir setzen weiter voraus, dass die Ungleichungen

$$|a_{ij}(x, u, 0) - a_{ij}(x, u, \text{grad } u)| \leq f(\tau(x), |\text{grad } u|),$$

$$a(x, u, 0) - a(x, u, \text{grad } u) \leq f(\tau(x), |\text{grad } u|),$$

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u, 0) < B(\tau(x))$$

gelten, wo die Funktionen  $f$ ,  $\tau$ ,  $B$  die oben erwähnten Bedingungen erfüllen, und dass die Konstante  $C$  aus (iii) grösser als  $\frac{1}{\beta} (n^2 K + 1) M$  ist. Weiter sei  $a \frac{\partial u}{\partial \ell} + b u = 0$  auf  $\dot{G}$  mit  $a \geq 0$ ,  $b \leq 0$ ,  $|a| + |b| > 0$ ; das Symbol  $\frac{\partial}{\partial \ell}$  bezeichnet die Ableitung in nichttangentialer Richtung. Dann ist  $u = 0$  auf  $G$ .

Der Satz 1 verallgemeinert die Ergebnisse der Arbeit [1], der Satz 2 die Ergebnisse des Artikels [2].

Literaturverzeichnis

- [1] Rudolf VÍBORNÍ: Maximum principle for non-hyperbolic equations, University of Maryland, The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Lecture Series, No 42, 1964, 1-33.
- [2] Takasi KUSANO: Remarks on some properties of solutions of some boundary value problems for quasi-linear parabolic and elliptic equations of the second order, Proc. Japan Acad., 39(1963), 217-222.

(Received April 26, 1966)