Jindřich Nečas

Sur l'appartenance dans la classe $C^{(k),\mu}$ des solutions variationnelles des équations elliptiques non-linéaires de l'ordre $2k$ en deux dimensions (Communication préalable)

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 8 (1967), No. 2, 209--217

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105105`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
8,2 (1967)

# SUR L'APPARTENANCE DANS LA CLASSE $C^{(k),\mu}$ DES SOLUTIONS VARIATIONNELLES DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES NON-LINÉAIRES DE L'ORDRE 2 $k$ EN DEUX DIMENSIONS

Jindřich NEČAS, Praha

(Communication préalable)

Il est considéré la régularité à l'intérieur du domaine plan $\Omega$ de la solution du problème variationnel

$$(1) \quad \min_{u-u_0 \in \mathring{W}_m^{(k)}} \left[ \int_\Omega F(x, D^\alpha u)\, dx - \int_\Omega \sum_{|i| \le k} D^i u \, f_i \, dx \right] .$$

Ici $W_m^{(k)}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions réelles, dont les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre k sont de m -ème puissance sommable sur $\Omega$ , $1 < m < \infty$ , et $\mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ est la fermeture en $W_m^{(k)}(\Omega)$ de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. La notation usuelle $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$ est utilisée.

Si k = 1 , l'appartenance de la solution u à la classe des fonctions, dont les premières dérivées sont $\mu$ -höldériennes dans $\Omega$ ou même dans la fermeture de $\Omega$ : $\overline{\Omega}$ , est démontrée sous différentes hypothèses (dont les substentielles sont les mêmes et correspondent aux notres) dans plusieurs travaux, dont nous citons: C.B. Morrey [4], E.R. Buley [1], O.A. Ladyženskaja, N.N. Uralceva [3]; ici la dimension de $\Omega$

est $N \geq 2$ . Tous ces travaux utilisent les résultats de De Giorgi - Nash, cf. De Giorgi [2]. La situation pour $N = 2$ (et $k = 1$) étant moins compliquée, C.B. Morrey a démontré ce résultat plus avant au travail [5] pour le cas $m = 2$ . Pour $k \geq 1$, $N = 2$ et $m = 2$ , ce résultat a été annoncé par J. Nečas au travail [6].

Dans ce travail est démontré un théorème sur la régularité des solutions faibles des équations elliptiques linéaires pour la dimension $N \geq 2$ (un analogue du théorème de De Giorgi pour $N = 2$ ) qui permet en liaison avec une technique assez fine de démontrer pour le cas $N = 2$ que la solution faible $u$ du problème (1) appartient dans la classe $C^{(k),\mu}(\overline{\Omega'})$ (la classe des fonctions $\mu$-höldériennes sur $\overline{\Omega'}$ avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre $k$ ). Ici $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$ , $\mu = \mu(\Omega')$ .

Le problème (1) correspond au problème de Dirichlet. Un raisonement simple montre que la question sur la régularité dans l'intérieur de $\Omega$ des solutions d'autres problèmes aux limites se ramène facilement à celle pour le problème (1). Remarquons que nous n'avons pas taché de chercher les conditions les plus générales pour $F(x, \mathcal{Y}_\alpha)$, $f_i$ pour ne pas compliquer la situation.

Hypothèses et notation: Le domaine $\Omega$ soit à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Par $c$ , on note les différentes constantes positives.

La fonction réelle $\mathcal{F}(x, \mathcal{Y}_\alpha)$ soit définie pour $x \in \overline{\Omega}$, $|\mathcal{Y}_\alpha| < \infty$, $|\alpha| \leq k$ , continue ici. On suppose l'existence d'un sousensemble $M$ des indices

$|\alpha| \leq k$ , contenant tous les indices $|\alpha| = k$ , tel que

$$(2) \qquad |F(x, \mathcal{J}_\alpha)| \leq c\,(1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{J}_\alpha|)^m, \quad 1 < m < \infty ,$$

$$(3) \qquad F(x, \mathcal{J}_\alpha) \geq c_1\,(1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{J}_\alpha|)^m - c_2 \,.$$

Si $m = 2$ , on suppose encore l'existence des dérivées continues $\frac{\partial F}{\partial \mathcal{J}_i}, \frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{J}_i \partial \mathcal{J}_j}, \frac{\partial F}{\partial x_\ell}, \frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{J}_i \partial x_\ell}$ dans le domaine de la définition de $F(x, \mathcal{J}_\alpha)$ et

$$(4) \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial \mathcal{J}_i}(x, \mathcal{J}_\alpha)\right| \leq c\,(1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{J}_\alpha|) ,$$

$$(5) \qquad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{J}_i \partial x_\ell}(x, \mathcal{J}_\alpha)\right| \leq c\,(1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{J}_\alpha|) ,$$

$$(6) \qquad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{J}_i \partial \mathcal{J}_j}(x, \mathcal{J}_\alpha)\right| \leq c ,$$

$$(7) \qquad c_3 \sum_{|i| = k} \xi_i^2 \leq \sum_{|i| = |j| = k} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{J}_i \partial \mathcal{J}_j} \xi_i \xi_j \leq c_4 \sum_{|i| = k} \xi_i^2 ,$$

$$(8) \qquad \sum_{|i|, |j| \leq k} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{J}_i \mathcal{J}_j} \xi_i \xi_j \geq 0 \,.$$

Si $m > 2$ , posons $\sigma = [\frac{m}{2}]$ (partie entière), $h = \frac{m-2}{\sigma}$ et supposons l'existence d'une fonction $F(x, \mathcal{J}_\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\sigma)$ définie pour $x \in \overline{\Omega}$, $|\mathcal{J}_\alpha| < \infty$, $|\alpha| \leq k$, $0 \leq \lambda_\ell \leq 1$, $\ell = 1, 2, \dots \sigma$ , continue avec les dérivées $\frac{\partial F}{\partial \mathcal{J}_i}, \frac{\partial F}{\partial x_\ell}, \frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{J}_i \partial x_\ell}, \frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{J}_i \partial \mathcal{J}_j}$ au domaine de définition et telle que $F(x, \mathcal{J}_\alpha, 0, \dots 0) =$

$= F(x, \mathcal{Y}_\alpha)$ (une homotopie).

Soit $0 \leq \tau \leq \sigma$ et supposons:

(9) $$|F(x, \mathcal{Y}_\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\tau, 0, \ldots 0)| \leq c(1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^m \cdot \prod_{\ell=1}^{\tau} \cdot (1 + \lambda_\ell \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{-h},$$

(10) $$F(x, \mathcal{Y}_\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\tau, 0, \ldots 0) \geq c_1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^m \cdot \prod_{\ell=1}^{\tau} (1 + \lambda_\ell \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{-h} - c_2,$$

(11) $$\left|\frac{\partial F}{\partial \mathcal{Y}_i}(x, \mathcal{Y}_\alpha, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\tau, 0, \ldots 0)\right| \leq c(1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{m-1} \cdot \prod_{\ell=1}^{\tau} (1 + \lambda_\ell \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{-h},$$

(12) $$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{Y}_i \partial x_\ell}(x, \mathcal{Y}_\alpha, \lambda_1, \ldots \lambda_\tau, 0, \ldots 0)\right| \leq c(1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{m-1} \cdot \prod_{\ell=1}^{\tau} (1 + \lambda_\ell \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{-h},$$

(13) $$c_3 (1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{m-2} \prod_{\ell=1}^{\tau} (1 + \lambda_\ell \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{-h} \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leq$$
$$\leq \sum_{|i|=|j|=k} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{Y}_i \partial \mathcal{Y}_j}(x, \mathcal{Y}_\alpha, \lambda_1, \ldots \lambda_\tau, 0, \ldots 0)\, \xi_i\, \xi_j \leq$$
$$\leq c_4 (1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{m-2} \prod_{\ell=1}^{\tau} (1 + \lambda_\ell \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{-h} \sum_{|i|=k} \xi_i^2,$$

(14) $$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{Y}_i \partial \mathcal{Y}_j}(x, \mathcal{Y}_\alpha, \lambda_1, \ldots \lambda_\tau, 0, \ldots 0)\right| \leq$$
$$\leq c(1 + \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{m-2} \prod_{\ell=1}^{\tau} (1 + \lambda_\ell \sum_{\alpha \in M} |\mathcal{Y}_\alpha|)^{-h},$$

(15) $$\sum_{|i|, |j| \leq k} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathcal{Y}_i \partial \mathcal{Y}_j}(x, \mathcal{Y}_\alpha, \lambda_1, \ldots \lambda_\tau, 0, \ldots 0)\, \xi_i\, \xi_j \geq 0.$$

Si $1 < m < 2$, on suppose l'existence d'une fonction $F(x, \zeta_\alpha, \lambda)$, définie pour $x \in \bar{\Omega}$, $|\zeta_\alpha| < \infty$, $|\alpha| \leq k$, $0 \leq \lambda \leq 1$, continue avec les dérivées $\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}, \frac{\partial F}{\partial x_\ell}, \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}, \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \partial x_\ell}$ au domaine de définition, telle que $F(x, \zeta_\alpha, 0) = F(x, \zeta_\alpha)$.

On suppose encore:

$$(16) \quad |F(x, \zeta_\alpha, \lambda)| \leq c(1+\sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^m (1+\lambda \sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{2-m},$$

$$(17) \quad F(x, \zeta_\alpha, \lambda) \geq c_1 (1+\sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^m (1+\lambda \sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{2-m} - c_2,$$

$$(18) \quad \left|\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}(x, \zeta_\alpha, \lambda)\right| \leq c(1+\sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{m-1} (1+\lambda \sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{2-m},$$

$$(19) \quad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \partial x_\ell}(x, \zeta_\alpha, \lambda)\right| \leq c(1+\sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{m-1} (1+\lambda \sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{2-m},$$

$$(20) \quad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}(x, \zeta_\alpha, \lambda)\right| \leq c(1+\sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{m-2} (1+\lambda \sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{2-m},$$

$$(21) \quad \begin{aligned} & c_3 (1+\sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{m-2} (1+\lambda \sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{2-m} \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \leq \\ & \leq \sum_{|i|=|j|=k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}(x, \zeta_\alpha, \lambda)\, \xi_i \xi_j \leq \\ & \leq c_4 (1+\sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{m-2} (1+\lambda \sum_{\alpha\in M} |\zeta_\alpha|)^{2-m}, \end{aligned}$$

$$(22) \quad \sum_{|i|,|j|\leq k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}(x, \zeta_\alpha, \lambda)\, \xi_i \xi_j \geq 0 .$$

Pour la fonction $u_0$ de (1) on suppose:

$$(23) \quad u_0 \in W_m^{(K)}(\Omega) \text{ pour } m \geq 2,$$

$$(24) \quad u_0 \in W_2^{(K)}(\Omega) \text{ pour } m < 2,$$

en ce qui concerne $f_i$ de (1), on suppose:

(25) $m \geq 2 : f_i \in L_2(\Omega), \ |i| \leq k$,

(26) $m \geq 2 : \int_\Omega \rho^{kp_0} \sum_{|i| \leq k} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \right|^{p_0} dx \leq c, \ 2 < p_0$,

(27) $m < 2 : f_i \in L_{\frac{m}{m-1}}(\Omega), \ |i| \leq k$,

(28) $m < 2 : \int_\Omega \rho^{k\frac{m}{m-1}} \sum_{|i| \leq k} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \right|^{\frac{m}{m-1}} dx \leq c$;

ici $\rho(x) = \text{distance}\,(x, \partial\Omega)$.

<u>Exemple</u>. Soit $F(x, \mathcal{Y}_\alpha) = (1 + \sum_{\alpha \in M} \mathcal{Y}_\alpha^2)^{\frac{m}{2}}, \ 1 < m < \infty$. Alors les hypothèses sur $F(x, \mathcal{Y}_\alpha)$ sont satisfaites, si nous posons pour $m \geq 2$:

$$F(x, \mathcal{Y}_\alpha, \lambda_1, \ldots \lambda_\tau) = (1 + \sum_{\alpha \in M} \mathcal{Y}_\alpha^2)^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\tau} (1 + \lambda_l \sum_{\alpha \in M} \mathcal{Y}_\alpha^2)^{-\frac{k}{2}},$$

pour $1 < m \leq 2$:

$$F(x, \mathcal{Y}_\alpha, \lambda) = (1 + \sum_{\alpha \in M} \mathcal{Y}_\alpha^2)^{\frac{m}{2}} (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} \mathcal{Y}_\alpha^2)^{1-\frac{m}{2}}.$$

<u>Résultats</u>:

<u>Théorème 1</u>. (Facile et connu, cf. F.E. Browder [8], J.Nečas [7].) Il existe une solution unique du problème (1) et satisfait à l'équation:

(29) pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} \frac{\partial F}{\partial \mathcal{Y}_i}(x, D^\alpha u) D^i \varphi \, dx = \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i \varphi \, f_i \, dx, \quad (N \geq 2).$$

<u>Théorème 2</u>. Soit $K_d = \{x \in E_N, |x| < d\}, N \geq 2$ et $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(K_d)$ une solution faible de l'équation

$$\sum_{|i|=|j|=k} D^i(A_{ij} D^j u) = \sum_{|i|=k} D^i f_i, \qquad \text{où } A_{ij} \in L_\infty(K_d),$$

$A_{ij} = A_{ji}$ ,

(30) $$c_1 \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \le \sum_{|i|=|j|=k} A_{ij}\, \xi_i \xi_j \le c_2 \sum_{|i|=k} \xi_i^2 \quad ,$$

$f_i \in L_p(K_d)$, $|i| = k$, $p > 2$ . Alors il existe des constantes $c_3$ , $c_4 > 1$ telles que

$$\Big(\int_{K_d} \sum_{|i|=k} |D^i u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \frac{2}{c_1} c_3^{\frac{p-2}{2}} \Big(\int_{K_d} \sum_{|i|=k} |f_i|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

si $2 \le p \le r$ , $r$ arbitraire mais fixe, $c_3 = c_3(r)$ ,

$c_4 = c_4(r)$ , et si $p\left(1 - \dfrac{\log \dfrac{1-\frac{1}{2}\frac{c_1}{c_2}}{1-\frac{c_1}{c_2}}}{\log c_4}\right) \le 2$ .

<u>Théorème 3</u>.(Cela généralise les résultats du travail de J. Nečas [7].) Soit u la solution de (1). Alors pour $2 < m < \infty$ :

$$\int_{\Omega} \varphi^{2k}\Big(1 + \sum_{\alpha \in M} |D^{\alpha} u|\Big)^{m-2} \sum_{|i| \le k+1} (D^i u(x))^2 dx \le c, \quad N > 2 .$$

<u>Théorème 4</u>.(Cf.le résultat de J.Nečas [6] .) Soit m = 2 , u la solution de (1), N = 2 . Alors il existe $\infty > p_1 > 2$ tel que pour $|i| = k + 1$

$$\| D^i u \|_{L_{p_1}(L(x_0))} \le c\, d^{-(1+k)} \quad ,$$

où $L(x_0) = \{x \in \Omega, |x - x_0| < \frac{1}{2} d, 2d = \text{distance}(x_0, \partial\Omega)\}$ .
La fonction $D^i u \in C^{(0),\mu}(\bar{\Omega}')$, $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$, $\mu = 1 - \frac{2}{p_1}$ ,
$|i| = k$ .

<u>Théorème 5</u>. Soit m > 2, N = 2 , u la solution du problème (1). Alors si $\Omega_d = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) > d\}$ :

$$\sup_{x \in \Omega_d} \sum_{|\alpha| \le k} |D^{\alpha} u(x)| \le c\, d^{-\frac{2(1+k)}{1-\frac{4}{2}}} .$$

Posons $A_d = 1 + \sup_{x \in \Omega_d} \sum_{|\alpha| \le k} |D^{\alpha} u(x)|$ . Il existe

$0 < c_1 \leq 1$ de sorte que si $p = 2 + c_1 A_d^{2-m}$,

alors pour $|\alpha| = k + 1$ :

$$\| D^\alpha u \|_{L_p(x_0)} \leq c d^{-(1+k)[1+\frac{2(1+k)(m-2)}{1-\frac{k}{2}}]} .$$

Enfin, nous avons pour $|\alpha| = 1 + k$ :

$$\| D^\alpha u \|_{C^{(0),\mu}(\Omega_{2d})} \leq c(\Omega_{2d}) \quad \text{avec} \quad \mu = 1 - \frac{2}{p} .$$

Théorème 6. Soit $1 < m < 2$, $N = 2$, $u$ la solution du problème (1). Alors

$$\sup_{x \in \Omega_d} \sum_{|\alpha| \leq k} | D^\alpha u(x) | \leq c d^{-\frac{2(1+k)}{m-1}} .$$

Il existe $0 < c_1 \leq 1$ de sorte que si $p = 2 + c_1 A_d^{m-2}$,

alors pour $|\alpha| = 1 + k$ :

$$\| D^\alpha u \|_{L_p(x_0)} \leq c d^{-(1+k)[1+\frac{4(2-m)}{m-1}]} .$$

Enfin, pour $|\alpha| = 1 + k$

$$\| D^\alpha u \|_{C^{(0),\mu}(\Omega_{2d})} \leq c(\Omega_{2d}) \quad \text{avec} \quad \mu = 1 - \frac{2}{p} .$$

## B i b l i o g r a p h i e


[1] E.R. BULEY: The differentiability of solutions of certain variational problems for multiple integrals, Technical Report 16(1960), Univ. Berkeley.

[2] E.De GIORGI: Sulla differenziabilità e l'analyticità delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem.Accad.Sci.Torino, 3(1957), 25-43.

[3] O.A. LADYŽENSKAJA, N.N. URALCEVA: Linějnyje i kvazilinějnyje uravněnija elliptičeskogo tipa, Izd.Nauka,Moskva 1964.

[4] C.B. MORREY: Quelques résultats récents du calcul des variations, Colloque CNRS,Paris 1962.

[5] C.B. MORREY: Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics, Univ.of California Publ.1(1943),1-130.

[6] J. NEČAS: On the existence and regularity of solutions of nonlinear elliptic equations,Proceedings of Equadiff II,Bratislava 1966.

[7] J. NEČAS: Sur la méthode variationnelle pour les équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique;l'éxistence et la régularité des solutions,Comment.Math.Univ. Carolinae 7,3(1966),301-317.

[8] F.E. BROWDER: Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems,Bull.Amer.Math. Soc.71(1965),176-183.

(Received January 13,1967)