Kurt Hauschild

Die Nichtexistenz starkregulärer standarder Modelle in der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel und ihren widerspruchsfreien Erweiterungen

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 8 (1967), No. 2, 249--255

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/105108`

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
8,2 (1967)

DIE NICHTEXISTENZ STARKREGULÄRER STANDARDER MODELLE IN DER MENGENLEHRE VON ZERMELO-FRAENKEL UND IHREN WIDERSPRUCHSFREIEN ERWEITERUNGEN

Kurt HAUSCHILD, Berlin

In [1] beweisen Bukovský und Hájek unter anderem, dass es kein stark reguläres standardes Modell der Gödelschen Mengenlehre Σ in sich gibt. Die vorliegende Note enthält ein Gegenstück zu diesem Resultat in der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel und ihren widerspruchsfreien Erweiterungen.

Im folgenden bezeichne ich als Mengenlehre jede im Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Identität formalisierte elementare Theorie $T = (S, V)$, deren Sprache S bestimmt wird durch eine zweistellige Relationskonstante $\in$,deren Satzmenge V insbesondere die üblichen Axiome (siehe [2]) der Mengenlehre enthält, und die zusätzlich folgender Bedingung (*) genügt:
Bedingung (*): Es gibt keine Folge $H_0(x)$, $H_1(x)$, ... von Ausdrücken derart, dass

(a) $V \vdash \exists!!x\, H_\nu(x)$ $\qquad (\nu = 0, 1, \dots)$,

(b) $V \vdash H_\nu(x) \wedge H_{\nu+1}(y) \rightarrow y \in x$ $\qquad (\nu = 0, 1, \dots)$.

Die Bedingung (*) besagt inhaltlich, dass es keine unendliche absteigende $\in$-Kette von definierbaren Mengen gibt. Sie ist stärker als das Fundierungsaxiom; man könnte sie Metafundierungsaxiom nennen. Es ist klar, dass keine elementare Theorie, die die Bedingung ($*$) verletzt, den Namen Mengenlehre verdient, auch dann nicht, wenn sie widerspruchsfrei ist.

Als definierte Zeichen benutzen wir im folgenden noch den bestimmten Artikel ι (siehe [3]), sowie die in der Mengenlehre gängigen Abkürzungen für leere Menge, geordnetes Paar usw. Insbesondere schreiben wir

$$\text{ord } a \, ,$$

wenn a eine Ordinalzahl ist - die Ordinalzahlen werden wie bei J.v. Neumann definiert, wobei die Ordnungsbeziehung mit der ϵ -Beziehung zusammenfällt -

$$\text{ord}\, [m, R] \, ,$$

wenn R ein zweistelliges Prädikat ist und die Menge m durch die durch R induzierte Relation geordnet wird,

$$\text{wohlord}\, [m, R] \, ,$$

wenn sie wohlgeordnet wird,

$$[m, R] \rightleftarrows [m_1, R_1] \, ,$$

wenn $\text{ord}\, [m, R]$ und $\text{ord}\, [m_1, R_1]$ gilt und ein Ordnungsisomorphismus existiert.

Es sei M^* ein einstelliges Prädikat und ϵ^* eine zweistellige Relation; M^* und ϵ^* seien in S definierbar.
Jedem Ausdruck $H \epsilon S$ ordnen wir einen Ausdruck $H^* \epsilon S$ zu dergestalt, dass in H jede gebundene Variable auf das Prädikat M^* eingeschränkt und jedes ϵ durch ϵ^* ersetzt wird (Zuvor müssen in H die definierten Zeichen wie $\&$, $\subseteq$ usw. eliminiert werden.). Ist beispielsweise

$$H \equiv (x)(\exists y)(x \epsilon y) \quad ,$$

so ist

$$H^* \equiv (x)(M^*x \rightarrow (\exists y)(M^*y \wedge x \in^* y)) .$$

Ist X eine Menge von Ausdrücken $\{H_i\}_{i \in J}$ von S , so verstehen wir unter X* die Menge $\{H_i^*\}_{i \in J}$. Grundsätzlich ist also insbesondere

(1) $H \in V$ genau dann, wenn $H^* \in V^*$.

<u>Metadefinition 1</u>. M* und $\in^*$ bilden ein syntaktisches Modell von T in sich, wenn gilt $V^* \subseteq V$.

Wir wollen einige terminologische Verabredungen treffen. Ist α ein definierbarer Term, $\alpha = \iota x H(x)$, so soll α^* derjenige Term sein, der im syntaktischen Modell genau so definiert wird wie α in der Ausgangstheorie, also $\alpha^* = \iota x (M^*x \wedge H^*(x))$. Der Definition

$$\emptyset = \iota x (y)(y \notin x)$$

entspricht also die Definition

$$\emptyset^* = \iota x (M^*x \wedge (y)(M^*y \rightarrow y \notin^* x)) .$$

Wegen (1) ist die Benutzung des bestimmten Artikels im einen Falle genau dann gerechtfertigt, wenn sie es im andern Falle ist, und es gilt

(2) $V \vdash \alpha \in \beta$ genau dann, wenn $V^* \vdash \alpha^* \in^* \beta^*$.

(3) Falls $V \vdash \alpha \in \beta$, so $V \vdash \alpha^* \in^* \beta^*$.

Analog verfahren wir bei definierten Relationen und Funktionen; so bedeutet $x \subseteq^* y$ beispielweise $(z)(M^*z \rightarrow$ $\rightarrow (z \in^* x \equiv z \in^* y))$.

Metadefinition 2. Ein durch M^* und ϵ^* gegebenes syntaktisches Modell von T in sich heisst starkregulär, wenn gilt $V \vdash \exists m\,(x \epsilon m \equiv M^* x \wedge ord^* x)$; die solchergestalt definierte Menge der Ausgangstheorie möge mit On^* bezeichnet werden.

Metadefinition 3. Ein durch M^* und ϵ^* gegebenes starkreguläres syntaktisches Modell von T in sich heisst standard, wenn gilt $V \vdash wohlord\,[On^*, \epsilon^*]$.

Theorem 1: Es gibt kein starkreguläres standardes Modell von T in sich.

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass M^* und ϵ^* ein starkreguläres standardes syntaktisches Modell von T in sich liefern.
Dann gilt

$$V \vdash \exists !!\, a\,(ord\ a \wedge [a, \epsilon] \xrightarrow{\sim} [On^*, \epsilon^*]) .$$

Die solcherweise definierte Ordinalzahl werde mit α_0, der Isomorphismus von $[On^*, \epsilon^*]$ auf $[\alpha_0, \epsilon]$ mit φ bezeichnet; φ ist eindeutig bestimmt und in S definierbar.

Wir definieren nunmehr, für $n = 0, 1, 2, \ldots$, eine Folge von Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ durch die Rekursionsvorschrift

$$\varphi(\alpha_n^*) = \alpha_{n+1} .$$

Diese Rekursionsvorschrift braucht nicht notwendigerweise in S einheitlich definiertbar zu sein. Dies schadet aber nichts. Für uns genügt es zu wissen, dass jede einzelne Gleichung in

S definierbar ist; letzteres ist offenbar der Fall.

Ich behaupte: $V \vdash \alpha_{n+1} \in \alpha_n$, für jedes n. Das zeige ich induktiv.

Anfangsschritt: Es ist $V \vdash \alpha_1 \in \alpha_0$, da α_1 nach Definition zum Wertebereich von φ gehört.

Induktionsschritt. Es sei bereits gezeigt, dass $V \vdash \alpha_n \in \alpha_{n-1}$. Daraus folgt, wegen (3), $V \vdash \alpha_n^* \in^* \alpha_{n-1}^*$, aus Isomorphiegründen weiterhin $V \vdash \varphi(\alpha_n^*) \in \varphi(\alpha_{n-1}^*)$; dies ist aber nichts anderes als $V \vdash \alpha_{n+1} \in \alpha_n$.

Also gilt $V \vdash \alpha_{n+1} \in \alpha_n$, für jedes n. Das widerspricht aber der Bedingung (*),q.e.d.

Anmerkung: Wenn es einen Ausdruck $H^{(*)}(x, y)$ gibt derart, dass für je zwei definierbare Terme, α und β, gilt $H^{(*)}(\alpha, \beta) \equiv \beta = \alpha^*$, ist die Rekursionsvorschrift einheitlich in S definierbar, und man kann nicht nur zu einem Widerspruch gegenüber der Bedingung (*) gelangen, sondern darüberhinaus zu einem Widerspruch gegen das Fundierungsaxiom selbst.

Im folgenden seien zwei Systeme, $T = (S, V)$ und $T_1 = (S_1, V_1)$ gegeben; beide seien im anfangs definierten Sinne Mengenlehre.

<u>Metadefinition 4</u>. M^* und $\in^*$ bilden ein syntaktisches Modell von T_1 in T, wenn gilt $V_1^* \subseteq V$.

Metadefinition 5. Ein durch M^* und ϵ^* gegebenes syntaktisches Modell von T_1 in T heisst starkregulär, wenn gilt $V \vdash \exists m\ (x \in m \equiv M^* x)$.

In diesem Falle sei widerum

$$On^* = \iota m\ (x \in m \equiv M^* x \wedge ord^* x).$$

Metadefinition 6. Ein durch M^* und ϵ^* gegebenes starkreguläres syntaktisches Modell von T_1 in T heisst standard, wenn gilt $V \vdash wohlord\ [On^*, \epsilon^*]$.

Theorem 2: Ist $V \subseteq V_1$, so gibt es kein starkreguläres standardes syntaktisches Modell von T_1 in T.

Beweis. Ein derartiges durch M^* und ϵ^* gegebenes Modell wäre in diesem Fall auch starkreguläres standardes syntaktisches Modell von T_1 in sich. Das ist aber unmöglich auf Grund von Theorem 1, q.e.d.

Theorem 3: Wenn es in $T = (S, V)$ ein starkreguläres Modell von $T_1 = (S_1, V_1)$ gibt, so ist $V \setminus V_1 \neq \emptyset$, und für jedes $H \in V \setminus V_1$ gilt weder $V_1 \vdash H$ noch $V_1 \vdash \sim H$, sofern nur $T_2 = (S, A\ell\ (V \cup V_1))$ widerspruchsfrei ist.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist trivial auf Grund von Theorem 2. Es sei $H \in V \setminus V$. Dann kann $V_1 \vdash H$ natürlich nicht gelten. Aus $V_1 \vdash \sim H$ wiederum würde folgen $V_1 \cup V \vdash \sim H$, im Widerspruch zu $V \vdash H$, q.e.d.

Theorem 3 illustriert drastisch die bekannte Tatsache, dass jedes Axiomensystem der Mengenlehre unvollständig ist, für welches man in der naiven Mengenlehre konstruktiv ein semantisches Modell angeben kann, dessen Ordinalzahlen durch die Elementbeziehung des Modells wohlgeordnet sind. Um sich dies klarzumachen, braucht man nur das bei der Konstruktion benutzte Fragment der naiven Mengenlehre zu formalisieren. Man kann dann das semantische Modell als syntaktisches Modell dieses Fragments auffassen. Dann ergibt sich die Unvollständigkeit des Axiomensystems sofort aus Theorem 3.

Literatur

[1] L. BUKOVSKÝ, P. HÁJEK: On the standardness and regularity of normal syntactic models of set theory, Bull.Acad.Polon.Sci. XIV(1966).

[2] E.J. THIELE: Ein axiomatisches System der Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel,Zeitschr.f. math.Logik,1,1955.

[3] K. SCHRÖTER: Theorie des bestimmten Artikels, ebenda,2, 1956.

(Received November 20, 1966)