

K. K. Mokrishchev

К вопросу о бесконечно малых изгибаниях тора

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 8 (1967), No. 2, 331--333

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105116>

## Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

К ВОПРОСУ О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ ТОРА

К.К. МОКРИЩЕВ, Ростов на Дону

Целью этой заметки является доказательство следующего утверждения:

если диаграмма вращений бесконечно малого изгиба куска поверхности тора является минимальной поверхностью, то она есть часть прямого геликоида.

Зададим поверхность тора параметрическими уравнениями:

$$(1) \quad \begin{cases} x = (a + \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch} u}) \cos v, \\ y = (a + \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch} u}) \sin v, \\ z = t \operatorname{ch} u, \end{cases}$$

где  $a = \operatorname{const} > 1$ ,  $\varepsilon = +1$  для области положительной кривизны,  $\varepsilon = -1$  для области отрицательной кривизны.

Коэффициенты метрической формы, символы Христоффеля второго рода и коэффициенты второй основной формы тора (1) представляются формулами:

$$E = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}, \quad F = 0, \quad G = \frac{(\varepsilon + a \operatorname{ch} u)^2}{\operatorname{ch}^2 u}, \quad \sqrt{EG - F^2} = \frac{\varepsilon + a \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch}^2 u},$$

$$\Gamma_{11}^1 = -t \operatorname{ch} u, \quad \Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{\varepsilon v \operatorname{ch} u}{(\varepsilon + a \operatorname{ch} u) \operatorname{ch} u},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\varepsilon(\varepsilon + a \operatorname{ch} u) v \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch} u}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0,$$

$$L = \frac{\varepsilon}{\operatorname{ch}^2 u}, \quad M = 0, \quad N = \frac{\varepsilon + a \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch}^2 u}.$$

Основная система дифференциальных уравнений теории бесконечно малых изгибаний поверхностей имеет вид [1]:

$$(2) \begin{cases} L\gamma - 2M\alpha + N\beta = 0, \\ \alpha_\nu - \gamma_u = \Gamma_{11}^1 \gamma - 2\Gamma_{12}^1 \alpha + \Gamma_{22}^1 \beta, \\ \alpha_u - \beta_\nu = \Gamma_{11}^2 \gamma - 2\Gamma_{12}^2 \alpha + \Gamma_{22}^2 \beta, \end{cases}$$

а средняя кривизна диаграммы вращений вычисляется в общем случае по формуле [2]:

$$\tilde{H} = - \frac{1}{2(\beta\gamma - \alpha^2)(EG - F^2)} \begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ \beta & \alpha & \gamma \end{vmatrix}.$$

Поэтому, если диаграмма вращений бесконечно малого изгибания куска поверхности тора будет минимальной поверхностью, то, учитывая, что  $F = M = 0$ , получим

$$\alpha(EN - LG) = 0,$$

или

$$\alpha \frac{\varepsilon + a \operatorname{ch} u}{\operatorname{ch}^3 u} a = 0,$$

но так как  $\varepsilon + a \operatorname{ch} u > 0$ , то  $\alpha = 0$ . Теперь система (2) упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} \gamma + \varepsilon(\varepsilon + a \operatorname{ch} u)\beta = 0, \\ \gamma_u = 2t \operatorname{ch} u \cdot \gamma, \\ \beta_\nu = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{A \operatorname{ch}^2 u}{\varepsilon(\varepsilon + a \operatorname{ch} u)}, \quad \gamma = A \operatorname{ch}^2 u, \quad A = \text{const}.$$

Чтобы найти диаграмму вращений

$$\bar{y} = \{X, Y, Z\}$$

обратимся к формулам [1]:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_u = \alpha \bar{x}_u - \beta \bar{x}_v, \\ \bar{\psi}_v = \gamma \bar{x}_u - \alpha \bar{x}_v, \end{cases}$$

которые, после несложных вычислений, дают

$$\begin{cases} X = -A \varepsilon \operatorname{sh} u \sin v, \\ Y = A \varepsilon \operatorname{sh} u \cos v, \\ Z = A v, \end{cases}$$

или

$$Z = A \left( \pi - \operatorname{arctg} \frac{X}{Y} \right),$$

а это - прямой геликоид.

Замечание. Последнее уравнение не содержит  $\varepsilon$ , поэтому, любой замкнутой области на части поверхности тора положительной кривизны и любой замкнутой области на части поверхности тора отрицательной кривизны, соответствует часть геликоида, заключенная между плоскостями

$$Z = 0, \quad Z = 2\pi A$$

и точке тора, приближающейся к какой-либо параболической точке его ( $u \rightarrow \infty$ ) соответствует на этой части геликоида точка, уходящая в бесконечность.

Ц и т и р о в а н н а я л и т е р а т у р а

- [1] Н.В. ЕФИМОВ: Качественные вопросы теории деформаций поверхностей, УМН Ш, вып.2(24), (1948).
- [2] П.Г. КОЛОВОВ: О бесконечно малом изгибании одного класса поверхностей, Тезисы докладов второй всесоюзной геометрической конференции, Харьков, (1964).

(Received December 12, 1966)