Norbert M. Flaisher

Новый тип задач для уравнения теплопроводнсюти (II)

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 9 (1968), No. 4, 511--514

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105194

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae
9, 4(1968)

НОВЫЙ ТИП ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (П)

Н.М. ФЛАЙШЕР, Москва

Ниже для уравнения $Tu \equiv u_{xx} - u_t = 0$ рассмотрена задача с начальным условием, содержащим производные до n-го порядка ($n < \infty$) по t искомой функции. Случай $n = 1$ изучен в [1] .

1. Пусть $\mathcal{D}$ - полуплоскость $t > 0$, $\mathfrak{M}_f$ - лежащее на оси Ox множество всех точек непрерывности $f(x)$ заданной на $E \equiv (-\infty, \infty)$, $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ - класс ограниченных при $t \to \infty$ и при $|x| \to \infty$ функций $u(x,t)$ экспоненциального типа [2] в $\mathcal{D}$, $C_t^n(\mathcal{D})$ ($n \geq 1$) - класс функций $u(x,t)$ таких, что $u_{t^n} \in C(\mathcal{D})$ (смысл C_x^n аналогичен), $\mathcal{O}\!\mathcal{l}(G)$ - класс функций $f(x) \in L(G)$, $G \subseteq E$, удовлетворяющих условиям

$$\int_G f(x)\,dx = 0, \quad \int_G |x f(x)|\,dx < \infty \ ,$$

$a_1, \dots, a_n$ - вещественны, $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$, $D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$.

Задача I . Найти функцию $u \in \mathcal{R}(\mathcal{D}) \cap C_x^2(\mathcal{D}) \cap C_t^n(\mathcal{D} \cup \mathfrak{M}_f)$, удовлетворяющую уравнению $Tu = 0$ в $\mathcal{D}$, а для всех $x \in \mathfrak{M}_f$ - условию $P(D_t)u(x,0) = f(x)$.

<u>Теорема I</u>. 1° При $a_n \neq 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, задача I имеет единственное решение для любой локально сум-

мируемой функции $f(x)$, ограниченной при $|x| \to \infty$ 1).

2° При $a_m = 0$, $a_{n-1} \neq 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$, $k = 1,\dots,n-1$ $(\lambda_n = 0)$ задача I имеет единственное, с точностью до постоянного слагаемого u_0, решение для $f(x) \in \mathfrak{A}(E)$.

3° При $a_m = a_{n-1} = 0$ задача I неразрешима.

Для вещественных простых λ_k обозначив ($\Phi(x)$ - интеграл ошибок)

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{4\sqrt{\lambda_k}P'(\lambda_k)} e^{\lambda_k t} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\sqrt{\lambda_k}(\xi-x)}\Phi(\sqrt{\lambda_k t} + \frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}) +$$
$$+ e^{-\sqrt{\lambda_k}(\xi-x)}\Phi(\sqrt{\lambda_k t} - \frac{\xi-x}{2\sqrt{t}}) - 2\,\mathrm{ch}\sqrt{\lambda_k}(\xi-x)] f(\xi)d\xi$$

через $I(x,t;\lambda_1,\dots,\lambda_m;f) \equiv I(x,t;\lambda^{(m)};f)$ имеем в случае 1° $u(x,t) = I(x,t;\lambda^{(n)};f)$ а в случае 2° $u(x,t) = I(x,t;\lambda^{(n-1)};f) + a_{n-1}^{-1} I_0(x,t;f) + u_0$, где

$$I_0(x,t;f) = \int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{\frac{t}{\pi}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} + \frac{1}{2}(\xi-x)\Phi(\frac{\xi-x}{2\sqrt{t}})] f(\xi)d\xi .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть все λ_k вещественные простые.

1° Для любых $p, q = 0, 1, 2, \dots$ все интегралы в $I_{x^p t^q}(x,t;\lambda^{(n)};f)$ сходятся равномерно при $|x| \le M$, $0 < t_0 \le t \le t_1$. В $\mathfrak{D}$ $u \in \mathfrak{K}$ аналитична по x и входит в C_t^∞, удовлетворяя уравнению $Tu = 0$ и начальному условию [3], так как

$$P(D_t)I(x,t;\lambda^{(n)};f) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} f(\xi)d\xi$$

----

1) Если при каком-либо k $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_k = 0$ или $\operatorname{Re}\lambda_k \le 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_k \neq 0$, то задача I неразрешима. Это относится и к 2° ($k = 1, \dots, n-1$) .

При $\mathfrak{M} = E$ единственность решения следует из принципа экстремума для $u, u_t, \ldots, u_n$ и из того, что решение ($A_{\pm k}$ - произвольные постоянные)

(1) $$\sum_{k=1}^{n} (A_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} + A_{-k} e^{-\sqrt{\lambda_k}x}) e^{\lambda_k t}$$

уравнения $Tu = 0$, удовлетворяющее условию $P(D_t)u = 0$, входит в $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ лишь для $A_{\pm k} \equiv 0, k = 1, \ldots, n$. При $\mathfrak{M}_f \subset E$ вводим $f(x;t_0) = P(D_t)I(x,t_0;\lambda^{(n)};f)$, $t_0 > 0$; так как $f(x;t_0) \in C(E)$, $f(\pm\infty;t_0) = 0$, задача $Tu = 0$, $t > t_0$; $P(D_t)u(x,t_0) = f(x;t_0)$, $x \in E$, имеет в $\mathcal{R}(\mathcal{D})$ единственное решение

(2) $$u(x,t;t_0) = I(x, t-t_0; \lambda^{(n)}; f(x;t_0)) \quad .$$

Но [3] почти всюду (для всех $x \in \mathfrak{M}_f$) $\lim_{t_0 \to 0} f(x;t_0) = f(x) \in L(E)$, значит в (2) возможен подынтегральный переход к пределу при $t_0 \to 0$, откуда следует единственность решения $u(x,t) = I(x,t;\lambda^{(n)};f)$ в классе $\mathcal{R}(\mathcal{D})$.

2° Преобразуем $I_0(x,t;f)$ как в [1], рассуждая далее как в 1° и [1] (в (1) n-ый член заменяем через $Ax + A_0$).

3° Достаточно взять $P(\lambda) = \lambda^2$; но в этом случае утверждение очевидно.

Для мнимых и кратных λ_k доказателство аналогично.

2. Пусть $\mathcal{D}^+$ - четверть $x > 0, t > 0$, $E_t^+ (E_x^+)$ - полуось $t > 0$ $(x > 0)$, $f(x)$ $(\varphi(t))$ задана на

E_x^+ (E_t^+), $b_1, \dots, b_n$ - вещественны, $Q(\lambda) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots$
$\dots + b_n$, $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Задача 2. Найти функцию $u \in \mathcal{K}(\mathcal{D}^+) \cap C_x^n(\mathcal{D}^+ \cup \mathfrak{M}_\varphi) \cap C_t^m(\mathcal{D}^+ \cup \mathfrak{M}_f)$, удовлетворяющую уравнению $Tu = 0$ в $\mathcal{D}^+$ и условию $P(D_t)u(x,0) = f(x)$ для $x \in \mathfrak{M}_f$ и $Q(D_x)u(0,t) = \varphi(t)$ для $t \in \mathfrak{M}_\varphi$.

При $\varphi(\infty) < \infty$, $\varphi \in L(E_t^+)$ теорема 1 верна и для задачи 2 (в случае 2^o $f \in \mathcal{O}\mathcal{l}(E_x^+)$). При $\varphi \equiv 0$ $u(x,t)$ представимо в виде $I(x,t;\lambda^{(m)}; f)$ (случай 1^o), для чего достаточно продолжить $f(x)$ на E_x^- так, что $Q(D)f(x)$ - нечетно. Это верно и в случае 2^o, а также при мнимых и кратных λ_k . Доказательство аналогично изложенному в [4] для случая $P(\lambda) \equiv 1$.

Литература

[1] Н.М. ФЛАЙШЕР: Новый тип задач для уравнения теплопроводности, Comment. Math. Univ. Carolinae, 9,1(1968),71-77.

[2] Е. ТИТЧМАРШ: Введение в теорию интегралов Фурье,М.-Л., ГИТТЛ,1948.

[3] С.Ф. ЛИДЯЕВ: О представимости решения уравнения теплопроводности в виде интеграла Пуассона.Изв. АН СССР,серия матем.,1941,5,1,263-268.

[4] О.А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ, В.А. СОЛОННИКОВ, Н.Н. УРАЛЬЦЕВА: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа,М.,"Наука",1967.

(Received July 10, 1968)