

Osvald Demuth

Заметка к работе: О теореме Фувини для интеграла Римана в конструктивной математике

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 10 (1969), No. 1, 115--120

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/105219>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1969

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Заметка к работе: О ТЕОРЕМЕ ФУБИНИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА В
КОНСТРУКТИВНОЙ МАТЕМАТИКЕ

О. ДЕМУТ, Прага
(O. DEMUTH, Praha)

В [2] доказано, что известный аналог теоремы Фубини для интеграла Римана не имеет в конструктивной математике места. Построенный там пример демонстрирует это на трехмерном случае. Естественно поставить вопрос, можно ли аналогичные примеры построить и для других размерностей. Для больших размерностей решить задачу просто - достаточно в примере из [2] добавить соответствующее число фиктивных переменных. Для двумерного случая ответ дает настоящая заметка.

В следующем пользуемся определениями и результатами заметки [2] .

Обозначение: Для произвольных сегментов $a \Delta b$ и $c \Delta d$ обозначим посредством $a \Delta b \circ c \Delta d$ сегмент $(c + a \cdot (d - c)) \Delta (c + b \cdot (d - c))$.

Теорема: Существует интегрируемая по Риману 2-функция φ такая, что для любого КДЧ x из сегмента $0 \Delta 1$ 1-функция $\widehat{\varphi}_x$ неинтегрируема по Риману.

Доказательство: Пусть $\{l_m\}_m$ возрастающая последовательность ЧЧ из доказательства теоремы 2 (из [2]), пусть Φ точное дизъюнктивное сегментное рациональное

покрытие сегмента $0 \triangleq 1$ такое, что $\forall n (\sum_{j=1}^n |\Phi_j|_1 < \frac{1}{2^i})$
(см. [1], стр. 469).

Пусть n, k, i и t НЧ, для которых выполнено
 $2^{k+1} + 1 \leq k \leq 3 \cdot 2^{k_n} + 1$ & $1 \leq i \leq n$. Построим возрастающую систему НЧ $\{k_j\}_{j=1}^{2^{k_n-t}-1}$ и систему НЧ $\{s_j\}_{j=1}^{2^{k_n-i}-1}$ так, что первая из этих систем является системой первых 2^{k_n-i-1} НЧ k удовлетворяющих условию $2^{k-i} \cdot (2^i - 2) \leq k < 2^{k-i} \cdot (2^i - 1)$ и таких, что система 1-сегментов $\{\Phi_m \circ (1 - \frac{1}{2^{i-1}}) \Delta (1 - \frac{1}{2^i})\}_{m=1}^{2^{i+1}}$ покрывает 1-сегмент $\frac{k}{2^{k_n}} \Delta \frac{k+1}{2^{k_n}}$ меньше чем из одной шестнадцатой, а во второй системе для всякого j , $1 \leq j \leq 2^{k_n-i-1}$, s_j наименьшее из НЧ s , для которых выполнено $1 \leq s < 2^{k_n+t-k}$ и 1-сегмент $(\frac{k_j}{2^{k_n}} + \frac{s}{2^{k_n+t}}) \Delta (\frac{k_j}{2^{k_n}} + \frac{s+1}{2^{k_n+t}})$ не перекрывается ни с одним из 1-сегментов системы

$\{\Phi_m \circ (1 - \frac{1}{2^{i-1}}) \Delta (1 - \frac{1}{2^i})\}_{m=1}^{2^{i+1}}$. Определим 2-функцию

$$\begin{aligned} {}^{123} \varphi_{n,k,i,t} & \text{ так, что для всяких КЧ } x \text{ и } y \text{ име место} \\ {}^{123} \varphi_{n,k,i,t}(x \square y) &= \sum_{j=1}^{2^{k_n-i-1}} 2^{2^{k_n+t-i}} \cdot (|x - \frac{k-2}{2^{k_n}} + 2| - |x - \frac{k-2}{2^{k_n}} + 2 - \\ & - \frac{1}{2^{k_n+t+1}}| - |x - \frac{k}{2^{k_n}} + 2 + \frac{1}{2^{k_n+t+1}}| + |x - \frac{k}{2^{k_n}} + 2|) \cdot (|y - \frac{k_j}{2^{k_n}} - \\ & - \frac{s_j}{2^{k_n+t}}| + |y - \frac{k_j}{2^{k_n}} - \frac{s_j+1}{2^{k_n+t}}| - |2y - \frac{2k_j}{2^{k_n}} - \frac{2s_j+1}{2^{k_n+t}}|) . \end{aligned}$$

Выполнено $0 \leq {}^{123} \varphi_{n,k,i,t} \leq \frac{1}{2^i}$ и ${}^{123} \varphi_{n,k,i,t}$ равномерно непрерывная 2-функция отличная от нулевой функции только внутри сегментов

$$\left(\frac{k-2}{2^{l_m}} - 2\right) \Delta \left(\frac{k}{2^{l_m}} - 2\right) \square \left(\frac{k_j}{2^{l_m}} + \frac{s_j}{2^{l_{m+i}}}\right) \Delta \left(\frac{k_j}{2^{l_m}} + \frac{s_{j+1}}{2^{l_{m+i}}}\right) \text{ где } 1 \leq j \leq 2^{l_m-i-1}.$$

Для всякого такого j и для любого КДЧ x из сегмента

$$\left(\frac{k-\frac{7}{4}}{2^{l_m}} - 2\right) \Delta \left(\frac{k-\frac{1}{4}}{2^{l_m}} - 2\right) \text{ колебание 1-функции } (\overset{123}{\rho_{m,k,i,t}})_{x \square}$$

на сегменте $\frac{k_j}{2^{l_m}} \Delta \frac{k_{j+1}}{2^{l_m}}$ равно $\frac{1}{2^i}$. Сумма длин

всех таких сегментов равна $\frac{1}{2^{i+1}}$. Следовательно, если

x КДЧ из сегмента $\left(\frac{k-\frac{7}{4}}{2^{l_m}} - 2\right) \Delta \left(\frac{k-\frac{1}{4}}{2^{l_m}} - 2\right)$ а $\{\tau_m\}_m$ возрастающая последовательность НЧ такая, что $\tau_{2^{i+2}} < 2^{l_m}$, то имеет место $\neg R_1(\overset{123}{\rho_{m,k,i,t}})_{x \square}, \{\tau_m\}_m, 1)$.

Пусть \mathcal{V}_1 нормальный алгоритм такой, что для всяких НЧ r и t выполнено $(\mathcal{V}_{1,L} r \square t, \& (\mathcal{V}_{1,L} r \square t, \mp \wedge \supset \supset \mathcal{V}_{1,L} r \square t + 1, \mp \wedge) \& (\exists \tau (\mathcal{V}_{1,L} r \square \tau, \mp \wedge) \equiv \equiv ! \mathcal{U}_{1,L} r \square r, \& \mathcal{V}_{1,L} r \square 1, \mp \wedge)$ (см. [1], стр. 305). Для произвольных НЧ k, r и m пусть $Q_{k,r}(m) \equiv (r \leq m \& 2^{l_m+1} + 1 \leq k \leq 3 \cdot 2^{l_m} + 1)$ и пусть $\alpha_{k,r}$ целое число, для которого выполнено $((\exists \tau Q_{k,r}(\tau) \supset Q_{k,r}(\alpha_{k,r})) \& \& (\neg \exists \tau Q_{k,r}(\tau) \supset \alpha_{k,r} = 0))$. Заметим, что $\forall k, r, m, n (Q_{k,r}(m) \& Q_{k,r}(n) \supset m = n)$.

Переходим к постройке 2-функции $\overset{123}{\rho}$. Пусть r и t натуральные числа. Определим 2-функцию $\overset{123}{\rho}_{r,t}$ так, что

$$1) \text{ если выполнено } (\mathcal{V}_{1,L} r \square t, \mp \wedge \vee (1 < t \supset$$

$$\supset (\vartheta_{1L} \cap \sigma t - 1, \bar{1} \neq \Lambda) \vee (\vartheta_{1L} \cap \sigma t, \bar{1} \neq \Lambda \supset \sigma_{\mathcal{N}_L \cap \sigma t, \tau_2} = 0))$$

то ${}^{123}\varphi_{n,t}$ нулевая функция, и

2) если имеет место $(1 < t \& \vartheta_{1L} \cap \sigma t - 1, \bar{1} \neq \Lambda \& \vartheta_{1L} \cap \sigma t, \bar{1} \neq \Lambda \& 0 < \sigma_{\mathcal{N}_L \cap \sigma t, \tau_2})$, определим ${}^{123}\varphi_{n,t} \Rightarrow {}^{123}\varphi_{\sigma_{\mathcal{N}_L \cap \sigma t, \tau_2}, \mathcal{N}_L \cap \sigma t, t}$

Видим, что ${}^{123}\varphi_{n,t}$ равномерно непрерывная 2-функция и что выполнено

$$0 \leq {}^{123}\varphi_{n,t} \leq \frac{1}{2^n} \& \forall x \forall y \ j \ ((y \leq 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \vee 1 - \frac{1}{2^n} \leq y \vee (1 \leq j \leq t+1) \& \& y \in \Phi_j \circ (1 - \frac{1}{2^{n-1}}) \Delta (1 - \frac{1}{2^n})) \supset {}^{123}\varphi_{n,t} (x \square y) = 0).$$

Заметим, что для всяких НЧ τ_1, t_1 и t_2 , где $t_1 \neq t_2$, по крайней мере одна из 2-функций ${}^{123}\varphi_{n,t_1}, {}^{123}\varphi_{n,t_2}$ является нулевой.

Из выше сказанного следует, что для любого НЧ τ ряд 2-функций $\sum_t {}^{123}\varphi_{n,t}$ сходится в каждой точке. Сумму этого ряда обозначим через ${}^{123}\varphi_n$. Имеем $0 \leq {}^{123}\varphi_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Сумму равномерно сходящегося ряда 2-функций $\sum_n {}^{123}\varphi_n$ обозначим посредством ${}^{123}\varphi$.

Без особых трудностей можно убедиться в том, что выполнено $R_2({}^{123}\varphi, \{2^{\ell_n}\}_m, 1)$. Таким образом 2-функция ${}^{123}\varphi$ интегрируема по Риману.

Пусть x НЧ из 1-сегмента $0 \Delta 1$. Докажем, что 1-функция $\widehat{{}^{123}\varphi}_{x \square}$ неинтегрируема по Риману.

Имеем $0 \leq \widehat{{}^{123}\varphi}_{x \square} \leq 1$. Предположим, что 1-функция $\widehat{{}^{123}\varphi}_{x \square}$ интегрируема по Риману. Тогда, как следует из тео-

лемы 1 ([2]), существует возрастающая последовательность НЧ $\{\tau_m\}_m$ такая, что выполнено

$$(1) \quad R_1(\overbrace{({}^{123}\mathcal{F}_{x \square}})}^{\text{---}}, \{\tau_m\}_m, 1) .$$

Пусть $\{\tau_m\}_m$ последовательность, обладающая такими свойствами. Для всякого НЧ n положим $\sigma_n \Leftarrow \tau_{2n+2}$. Как отмечено в доказательстве теоремы 2 из [2] к x и последовательности НЧ $\{\sigma_m\}_m$ существует НЧ r такое, что имеет место

$$! \mathcal{U}_{Lr \square r} \& \left(\frac{\mathcal{U}_{Lr \square r} - \frac{7}{4}}{2^{\sigma_r}} - 2 < x < \frac{\mathcal{U}_{Lr \square r} - \frac{1}{4}}{2^{\sigma_r}} - 2 \right)$$

и следовательно выполнено $r \leq \sigma_r \& 2^{\sigma_r+1} + 1 \leq$

$$\leq \mathcal{U}_{Lr \square r} \leq 3 \cdot 2^{\sigma_r} + 1 . \text{ Но тогда } \alpha_{\mathcal{U}_{Lr \square r}, r} = \sigma_r$$

и существует НЧ t_0 такое, что 1-функция

$$\overbrace{({}^{123}\mathcal{F}_{\sigma_r, \mathcal{U}_{Lr \square r}, r, t_0})_{x \square}}^{\text{---}} \text{ равна на 1-сегменте}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \Delta \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \text{ 1-функции } \overbrace{({}^{123}\mathcal{F}_{x \square}}^{\text{---}} \text{ и обращается}$$

в ноль в других точках. Отсюда на основании (1) получаем

$$R_1(\overbrace{({}^{123}\mathcal{F}_{\sigma_r, \mathcal{U}_{Lr \square r}, r, t_0})_{x \square}}^{\text{---}}, \{\tau_m\}_m, 1). \text{ С другой стороны ввиду}$$

выше приведенных свойств 2-функций типа $({}^{123}\mathcal{F}_{\sigma_n, \mathcal{U}, i, t}$

и того, что имеет место $\tau_{2n+2} = \sigma_r < 2^{\sigma_r}$, выполнено

$$\neg R_1(\overbrace{({}^{123}\mathcal{F}_{\sigma_r, \mathcal{U}_{Lr \square r}, r, t_0})_{x \square}}^{\text{---}}, \{\tau_m\}_m, 1) .$$

Л и т е р а т у р а

[1] Проблемы конструктивного направления в математике - 2

(сборник работ), Труды мат. инст. им. В.А. Стеклова,
Том LXVII (1962).

- [2] О. ДЕМУТ: О теореме Фубини для интеграла Римана в кон-
структивной математике, Comment. Math. Universit.
Carolinae Volume 9(1968), 677-686.

(Received December 18, 1968)