Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

M. N. L'vovskij

Об искажении при голоморфных отображениях в гиперболические многообраэия

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 2, 387--391

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105632

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1975

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,2 (1975)

ОБ ИСКАЖЕНИИ ПРИ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

М.Н. ЛЬВОВСКИЙ, Москва

Резюме: Получен локальный аналог теоремы искажения Кебе для голоморфных отображений в многообразия, гиперболические по С. Кобаяси. Для случая полных гиперболических многообразий доказана теорема об искажении отображения в целом.

Ключевые слова: Метрика Бергмана, расстояние Кобаяси, гиперболические многообразия, голоморфные отображения.

AMS: 32H20 Ref. Ž.: 3.991

В данной работе мы установим локальный аналог классической теоремы искажения Кебе для голоморфных отображений в гиперболические по С. Кобаяси (в дальнейшем – гиперболические) многообразия. (О таких многообразиях см., например, в [1].)

Для отображений в полные гиперболические многообразия мы получим глобальную оценку искажения.

Пусть B – единичный шар в пространстве $\mathbb{C}^m$ с евклидовой нормой $\|\cdot\|$, M – гиперболическое многообразие комплексной размерности m с расстоянием Кобаяси $d(p,q)$, $p,q \in M$. Фиксируем $x_0 \in M$.

Лемма 1. Существует такое число $\rho_1 \in (0,1]$, что из любой последовательности $\{f_n\}$ голоморфных отображений B в

M, удовлетворяющих условию $f_n(0)=x_0$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на компактах шара $B(\rho_1)=\{z\in B:\|z\|<\rho_1\}$.

<u>Доказательство</u>. Возьмем относительно компактную окрестность U точки x_0. Положим $\rho_1=\min(\inf_{x\in\partial U} d(x_0,x_1),1)$; это число положительно в силу непрерывности $d(x_0,x)$ как функции от x и компактности ∂U. Так как голоморфные отображения не увеличивают расстояния Кобаяси, они образуют равностепенно непрерывное семейство, и $f_n(B(\rho_1)\subset U\subset\subset M$ для всех f_n. Беря счетное всюду плотное множество точек в $\bar{B}(\rho_1)$, мы стандартным диагональным процессом выбираем искомую подпоследовательность.

Предположим теперь, что в окрестности x_0 введена некоторая эрмитова метрика h (например, евклидова метрика локальной карты в x_0). Рассмотрим класс F голоморфных отображений B в M, удовлетворяющих условию: для всех $f\in F$ $f(0)=x_0$, и $|\mathcal{J}f(0)|\geq 1$, где якобиан вычисляется относительно метрики h.

На основании наше леммы 1 и теоремы В [2] можно доказать

<u>Лемму 2</u>. Существует такое число $\rho_2\in(0,1]$, что все отображения класса F взаимно-однозначны в шаре $B(\rho_2)$.

<u>Теорема 1</u>. Существуют такое число $\rho_0\in(0,1]$, и такая действительная неотрицательная строго возрастающая полунепрерывная сверху функция $\varphi(\rho)$, $\rho\in[0,\rho_0)$, что для $z\in B(\rho_0)$ и всех $f\in F$

$$\varphi(\|z\|)\leq d(x_0,f(z)) .$$

В [3] Ф.А. Гриффитс установил аналогичный результат для голоморфных отображений в алгебраические многообразия с обильным каноническим расслоением.

Теорему 1 можно доказать с помощью леммы 1 и 2 подобно тому, как из соответствующих лемм для алгебраических многообразий выводится упомянутый результат Ф.А. Гриффитса.

<u>Замечание 1</u>. В силу гиперболичности M и поскольку расстояние Кобаяси в шаре совпадает с расстоянием в метрике Бергмана, для всех $z \in B$ имеет место оценка

$$d(x_0, f(z)) \leq \frac{1}{2} \ln \frac{1+\|z\|}{1-\|z\|} .$$

<u>Замечание 2</u>. Если M является полным гиперболическим многообразием, то по теореме 3.1 [1] из последовательности $\{f_m\}$, фигурирующей в лемме 1, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на любом компакте в B.

Переходя к формулировке теоремы об искажении отображения во всем шаре B, рассмотрим класс Φ голоморфных отображений B в полное гиперболическое многообразие M (комплексной размерности m), в окрестности точки x которого введена некоторая эрмитова метрика h_x, однолистных на всем шаре и удовлетворяющих условию: для всех $z \in B$ и всех $f \in \Phi$

$$| J_{h_{f(z)}} f(z) | \geq C(f(z)) > 0$$

где якобиан вычисляется относительно метрики $h_{f(z)}$, а константа $c(f(z))$ зависит только от точки $f(z)$, но не от отображения f.

<u>Лемма 3</u>. Если существует предел g (в смысле равномерной сходимости на компактах) последовательности $\{g_m\}$,

$g_m \in \Phi,\ m = 1,2,\ldots$, то $g \in \Phi$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать однолистность отображения g . Пусть $g(a) = g(b) = p,\ a \neq b$. Возьмем локальную систему координат для M с началом в точке p . Тогда в некоторой окрестности a отображения g_m (для достаточно больших m) и g задаются соответственно наборами голоморфных функций $(g_m^{(1)},\ldots,g_m^{(m)})$ и $(g^{(1)},\ldots,g^{(m)})$, а в окрестности b - наборами $(\tilde{g}^{(1)},\ldots,\tilde{g}_m^{(m)})$ и $(\tilde{g}^{(1)},\ldots,\tilde{g}^{(m)})$.

В силу условия, наложенного на якобианы отображений, все множества $\{g_m^{(i)} = 0\}$, $\{g^{(i)} = 0\}$, $\{\tilde{g}_m^{(i)} = 0\}$, $\{\tilde{g}^{(i)} = 0\}$, $i = 1,\ldots,m$, являются аналитическими подмногообразиями размерности $m-1$ в соответствующих окрестностях a и b . Подмногообразия $\{g^{(i)} = 0\},\ i = 1,\ldots,m$, имеют общую точку a , следовательно, подмногообразия $\{g_m^{(i)} = 0\},\ i = 1,\ldots,m$, имеют общую точку в любой окрестности a для достаточно больших n . Аналогично, подмногообразия $\{\tilde{g}_m^{(i)} = 0\},\ i = 1,\ldots,m$, имеют общую точку в любой окрестности b для достаточно больших n .

Выбирая такие окрестности a и b непересекающимися, а n - подходящим в обоих случаях, мы приходим к противоречию с однолистностью отображения g_m .

На основании замечаний 1 и 2 и леммы 3 метод, с помощью которого установлена теорема 1, можно применить для получения следующего глобального результата.

Теорема 2. Пусть x_0 - фиксированная точка полного гиперболического многообразия M . Существует такая действительная неотрицательная строго возрастающая полунепрерывная сверху функция $\varphi(\rho),\ \rho \in [0,1)$, что для всех $f \in \Phi$, удовлетворяющих условию $f(0) = x_0$, и всех $z \in B$ имеет место оценка

$$\varphi(\|x\|) \leq d(x_0, f(x)) \leq \frac{1}{2} \ln \frac{1+\|x\|}{1-\|x\|} .$$

Автор глубоко благодарен профессору В.В. Шабату за весьма ценные обсуждения этой работы.

Литература

[1] S. KOBAYASHI: Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker,New York,1970.

[2] H. WU: Normal families and holomorphic mappings, Acta Math.119(1967),193-233.

[3] Ф.А. ГРИФФИТС: Голоморфные отображения в канонические алгебраические многообразия, Математика 18 (1974),120-137.

Механико-матем.факультет
Московского гос. университета
Красный Маяк 5-1-76
113 519 Москва, С С С Р

(Oblatum 15.1.1975)