Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Vojtěch Bartík

Общая теорема о замощениях непрерывных отображений

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 16 (1975), No. 4, 693--698

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105657

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

16,4 (1975)

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О ЗАМОЩЕНИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. БАРТИК, Прага

Содержание: Формулируется общая теорема о замощениях непрерывных отображений в ELCX-пространства, дается набросок ее доказательства и приводятся некоторые ее следствия.

Ключевые слова: Замощение непрерывного отображения, ELCX-пара, когомологии Александрова-Чеха.

AMS: 55B05 Ref. Ž.: 3.971.11

Согласно Милнору [9] ELCX-структурой для пары (E, F) топологических пространств называется пара $(\{G_q \mid q \in Q\}, \lambda)$, состоящая из открытого покрытия $\{G_q \mid q \in Q\}$ пространства E и непрерывного отображения $\lambda : G \times [0,1] \longrightarrow E$, где $G = \bigcup \{G_q \times G_q \mid q \in Q\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

(ELCX 1) $\lambda(e_0, e_1, 0) = e_0$, $\lambda(e_0, e_1, 1) = e_1$, для всех пар $(e_0, e_1) \in G$;

(ELCX 2) $\lambda(G_q \times G_q \times [0,1]) \subset G_q$ для всех пар $q \in Q$;

(ELCX 3) $\lambda(e_0, e_1, t) \in F$ для всех пар $(e_0, e_1) \in G \cap (F \times F)$; и $t \in [0,1]$;

(ELCX 4) $\lambda(e, e, t) = e$ для всех $e \in E$ и всех $t \in [0,1]$.

Пара (E, F), обладающая по крайней мере одной ELCX-структурой, называется ELCX-парой.

В [3, *Appendix*] в качестве следствия общих теорем о чеховских продолжениях гомотопических кофункторов сформулировано следующее утверждение, обобщающее теоремы о замощениях доказанные в [6], [7], [4], [5] и [8]:

Для клеточной пары (Y, B), произвольной пары (X, A) и множества $cov(X)$ нормальных покрытий пространства X, конфинального в классе всех нормальных покрытий пространства X, каноническое отображение

$$\Phi(X,A;Y,B): \varinjlim_{\mathcal{U} \in cov X} [\,|N(\mathcal{U})|,\ |N(\mathcal{U} \cap A)|, Y, B] \to [X, A, Y, B],$$

индуцированное каноническими отображениями пространства X в геометрические нервы $|N(\mathcal{U})|$ покрытий $\mathcal{U} \in cov(X)$, биективно.

Оказывается, что это утверждение а также теорема В работы [1] допускают следующее обобщение, представленное автором еще в начале 1971г на семинаре Е.Г. Скляренко в Москве и летом 1971 г на семинаре М. Катетова в Праге, но до сих пор неопубликованное.

1. <u>Теорема</u>. Пусть m - бесконечное кардинальное число, (X, A) - произвольная пара, $cov_m(X)$ - конфинальное подмножество класса всех нормальных покрытий мощности $\leq m$ пространства X и (Y, B) - пара, которая доминируется ELCX-парой (E, F) с ELCX-структурой $(\{G_q \mid q \in Q\}, \lambda)$, где $card\ Q \leq m$.

Каноническое отображение

$$\Phi_m(X,A;Y,B): \varinjlim_{\mathcal{U} \in cov_m(X)} [\,|N(\mathcal{U})|, |N(\mathcal{U} \cap A)|; Y, B] \to [X, A; Y, B],$$

индуцированное каноническими отображениями пространства X в геометрические нервы $|N(\mathcal{U})|$ покрытий $\mathcal{U} \in \in cov_m(X)$, биективно в каждом из следующих случаев:

(а) покрытие $\{G_q \mid q \in Q\}$ нормально,

(б) покрытие $\{G_q \mid q \in Q\}$ обладает σ-локально конечным открытым измельчением и пространство X счетно паракомпактно и нормально;

(в) пространство X $\max(\aleph_0, \operatorname{card} Q)$ -паракомпактно (в смысле [10]) и нормально.

2. Следствие. Если пара (E,F) обладает $ELCX$ - структурой $(\{G_q \mid q \in Q\}, \lambda)$, в которой покрытие $\{G_q\}$ нормально, то она гомотопически эквивалентна клеточной паре мощности $\leq \max(\aleph_0, \operatorname{card} Q)$.

3. Следствие. Если пара (Y,B) доминируется клеточной парой мощности $\leq m$ $(m \geq \aleph_0)$, то отображение $\Phi(X,A; Y,B)$ биективно для каждой пары (X,A).

Доказательство. Следует из теоремы 1, так как не трудно показать, что - аналогично случаю $m = \aleph_0$, см. [9] - и при $m > \aleph_0$ клеточная пара мощности $\leq m$ гомотопически эквивалентна паре $(|K|,|L|)$, где (K,L) - симплициальная пара мощности $\leq m$, которая согласно [9] гомотопически эквивалентна $ELCX$-паре (E,F), где E - метризуемое пространство веса $\leq m$.

Напомним, что покрытием пары (X,A) называется пара $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_A)$, где $\mathcal{U}_X = \{U_i \mid i \in J_X\}$ - покрытие пространства X и $\mathcal{U}_A = \{U_i \cap A \mid i \in J_A \subset J_X\}$ - покрытие пространства A и что мощностью такого покрытия называется $\operatorname{card} \mathcal{J}_X$.

4. Следствие. Пусть m - бесконечное кардинальное число и G - абелева группа. Если $\operatorname{card} G \leq m$, то для произвольной пары (X, A) , в которой пространства X , A паракомпактны и регулярны, имеет место канонический изоморфизм

$$\check{H}(X, A; G) \approx \varinjlim H(N(\mathcal{U}_X), N(\mathcal{U}_A); G) ,$$

где $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_X, \mathcal{U}_A)$ принадлежит конфинальному подмножеству класса всех открытых покрытий мощности $\leq m$ пары (X, A).

В частности, если группа G конечна или счетна и подпространство A замкнуто, то когомологии Александрова-Чеха $\check{H}(X, A; G)$ полностью определяются классом счетных (звездно конечных) открытых покрытий пространства X .

Доказательство. Первая часть следствия в случае $A = \emptyset$ вытекает непосредственно из следствия 3 и [1, Теорема A], так как существуют полиэдры Эйленберга-Маклейна $K(G, m)$ мощности $\leq m$ и общий случай легко сводится к этому частному с помощью 5-леммы.

Вторая часть следствия очевидна.

Доказательство теоремы 1. Так как биективность отображения $\Phi(X, A; Y, B)$ влечет за собой биективность отображения $\Phi(X, A; Y', B')$ для любой пары (Y', B'), которая доминируется парой (Y, B) , то можно предполагать $(Y, B) = (E, F)$. Но в этом случае доказательство отличается от доказательства теоремы В работы [1] посуществу лишь тем, что ссылки на паракомпактность пространства X нужно заменить ссылками на известные свойства нормальных покрытий и следующие результаты:

(а) Если $\mathcal{U}=\{U_i \mid i\in \mathcal{I}\}$ - нормальное покрытие произведения $X\times[0,1]$, то существует нормальное открытое покрытие $\mathcal{V}=\{V_j \mid j\in\mathcal{J}\}$ пространства X и такие конечные (регулярные) открытые покрытия $\mathcal{W}_j=\{W_{j,k} \mid 0\le k\le k_j\}$ $(j\in\mathcal{J})$ отрезка $[0,1]$, что покрытие $\{V_j\times W_{j,k} \mid j\in\mathcal{J}, 0\le k\le k_j\}$ пространства $X\times[0,1]$ (очевидно нормальное) вписано в покрытие $\mathcal{U}$ и $\operatorname{card}\mathcal{J}\le\max(\aleph_0,\operatorname{card}\mathcal{I})$. См. [2, доказательство теоремы 4.8].

(б) Пространство нормально и m-паракомпактно тогда и только тогда, когда оно регулярно и каждое его открытое покрытие мощности $\le m$ нормально [10, *Theorem* 1.1].

(в) Прямое произведение m-паракомпактного нормального пространства и бикомпактного регулярного пространства веса $\le m$ нормально и m-паракомпактно [10, *Theorems* 2.1, 2.2].

Литература

[1] БАРТИК В.: Когомологии Александрова-Чеха и отображения в полиэдры Эйленберга-Маклейна, Мат. сб. (Н.С.) 76(118:2) (1968), 231-238.

[2] DOLD Albrecht, Partitions of unity in the theory of fibrations, Ann. Math.78(1963), 223-255.

[3] DOLD A.: Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag, 1972.

[4] GOTO Tatsuo: Homotopical cohomology groups of paracompact spaces, Sci. Repts. Tokyo Kyoiku Dai-

gaku, A9(1967), N. 214-219, 163-169.

[5] GOTO Tatsuo: A note on Künneth formula, Sci. Repts. Tokyo Kyoiku Daigaku, 10(1969), N. 249-262, 219-222.

[6] HU S.T.: Mappings of a normal space into an absolute neighborhood retract, TAMS 64(1948), 336-358.

[7] KODAMA Y.: Mappings of a fully normal space into an absolute neighborhood retract, Sci. Rept. Tokyo Kyoiku Daigaku, A5(1955), 37-47.

[8] LEE C.N., RAYMOND F.: Čech extensions of contravariant functors, TAMS 133, 415-434(1968).

[9] MILNOR J.: On spaces having the homotopy type of a CW-complex, TAMS 90(1959), 272-280.

[10] MORITA K.: Paracompactness and product spaces, Fund. Math. 50(1962), 223-236.

Matematický ústav ČSAV

Žitná 25

Praha 1

Československo

(Oblatum 27.5. 1975)