Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

Ali Deaibes; René Pupier

Sur la sommabilité de familles de fonctions uniformément continues

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 18 (1977), No. 4, 741--753

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/105817

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE

18,4 (1977)

SUR LA SOMMABILITÉ DE FAMILLES DE FONCTIONS UNIFORMÉMENT CONTINUES

A. DEAIBES et R. PUPIER, Lyon - St-Etienne

Résumé. On étudie des conditions pour que certaines familles $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions numériques uniformément continues fournissent une somme $f = \sum f_i$ uniformément continue. Ces conditions sont reliées à des travaux de J. Isbell, Z. Frolík et des auteurs.

Mots clefs: Fonction uniformément continue, somme des fonctions, uniformément localement finie.

AMS: 54E15, 54C99 Ref. Ž.: 3.962

Introduction. Reprenant l'étude d'un type d'espaces uniformes introduit par J. Isbell ([9]), N. Azzam, qui les nomme espaces de type (C), montrait dans sa thèse que ces espaces convenaient particulièrement pour l'étude de certains espaces de "mesures" sur un espace uniforme ([1]). Les auteurs donnaient alors une caractérisation des espaces de type (C) en termes de propriété uniformément locale ([4]); il s'avérait que cette propriété était fort proche de l'une de celles faisant l'objet de l'article [5] de Z. Frolík. Ces classes d'espaces uniformes vérifient, à des nuances près, une propriété de sommation pour les suites de fonctions numériques uniformément continues; par exemple, pour les espaces de type (C), toute suite $(f_n)_{n\in N}$ de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$, faiblement uniformément localement finie, fournit une fonction $f = \Sigma f_n$ qui appartient à $\mathcal{U}(X)$ ([1]), th. 1.3.5); pour les espaces définis par Z. Frolík, la même propriété a lieu si de plus la suite est uniformément bornée. Toujours motivés par l'étude des espaces de mesures, il nous est apparu qu'une condition légèrement plus contraignante jouait un rôle important.

Nous nous proposons donc de fixer provisoirement les liens entre cette condition et les espaces précédemment évoqués. Quelques rappels sont nécessaires: pour tout espace uniforme séparé $(X;\mu)$ on désigne par $\sigma\mu$ la structure uniforme faible définie par les $f \in \mathcal{U}(X)$. L'espace $(X;\sigma\mu)$ s'appelle l'affaibli de $(X;\mu)$. On désigne par $t_f\mu$ la structure uniforme fine associée à μ. Si, pour toute partie $Y \subset X$ et toute $f \in \mathcal{U}(Y;\mu|Y)$, il existe un prolongement $g \in \mathcal{U}(X)$, on dit que $(X;\mu)$ vérifie la propriété de $\mathcal{U}$-plongement (en abrégé (U.P)). Enfin, si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de fonctions appartenant à $\mathcal{U}(X)$, on dit qu'elle est <u>discrète</u> si la famille $(coz(f_i))_{i\in I}$ est une famille de parties uniformément discrète de $(X;\mu)$.

La première version de cet article ayant été soumise aux Editeurs de Comment. Math. Univ. Carolinae, ceux-ci nous ont signalé et fait parvenir le Séminaire sur les espaces uniformes 1975-1976 dirigé par Z. Frolík. Dans l'article [7] cité en références, des résultats similaires aux notres ont été obtenus indépendamment. Nous en avons tenu compte dans la rédaction définitive.

§ 1. <u>Espaces de type</u> (C) <u>et espaces</u> S^∞<u>-fins</u>. Dans [9], J. Isbell étudiait les espaces faibles définis de la façon suivante: soit A une sous-algèbre de R^X, stable par composition, i.e. pour toute famille $(f_1,\dots,f_n)$ de fonctions de A et toute application continue $g\colon R^n \longrightarrow R$, l'application $g \circ [f_1,\dots,f_n]$ appartient à A, où $[f_1,\dots,f_n]$ est le produit restreint des fonction f_k, défini dans X et à valeurs dans R^n; les espaces uniformes étudiés sont les espaces faibles $(X; \sigma_A)$, où σ_A est la structure uniforme faible engendrée par les $f \in A$; on a alors $\mathcal{U}(X; \sigma_A) = \bar{A}^u$, adhérence de A dans R^X muni de la convergence uniforme.

Afin de s'affranchir des espaces faibles, N. Azzam ([1]) a étudié les espaces $(X; \mu)$ pour lesquels $\mathcal{U}(X)$ luimeme est stable par composition. Un tel espace est un espace de type (C). La stabilité par composition étant une propriété de $\mathcal{U}(X)$ est donc conservée pour toute structure uniforme ν sur X telle que $\mathcal{U}(X;\nu) = \mathcal{U}(X;\mu)$. Les théorèmes de Nachbin-Shirota ont pu être étendus aux espaces uniformes de type (C). Une première tentative dans ce sens avait conduit l'un des auteurs ([11]) à introduire les espaces <u>simplement fins</u> définis comme suit: toute fonction $f \in R^X$ qui est uniformément localement uniformément continue (ULUC) est en fait uniformément continue. Ces espaces sont liés aux techniques de raffinement définies par Z. Frolík ([6]). Les études plus systématique des espaces de mesures ont amené l'autre auteur ([4]) à utiliser une condition un peu plus faible:

1.1. <u>Définition</u>. Un espace $(X;\mu)$ est dit S^{∞}-fin si toute fonction $f\colon X \longrightarrow R$ qui est uniformément localement "continue et bornée" (en abrégé ULUCB) appartient à $\mathcal{U}(X)$.

Si $(X;\mu)$ est simplement fin (resp. S^{∞}-fin) il en est de même pour toute structure uniforme ν sur X telle que $\mu \supset \nu \supset \sigma\mu$.

La liaison avec les espaces de type (C) est la suivante:

1.2. <u>Proposition.</u> Les propriétés suivantes d'un espace $(X;\mu)$ sont équivalentes:

a) (X,μ) est un espace de type (C);

b) toute suite $(f_n)_{n\in N}$ de fonctions de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$, faiblement uniformément finie, est telle que la fonction $f = \Sigma f_n$ appartient à $\mathcal{U}(X)$;

c) $(X,\sigma\mu)$ est S^{∞}-fin;

d) pour tout entier $n \geq 1$, toute application uniformément continue $f: X \longrightarrow R^n$ reste uniformément continue de X dans $\sigma t_f R^n$.

<u>Preuve</u>: a) $\Longrightarrow$ b) est le théorème 1.3.5 de [1].

b) $\Longrightarrow$ c): soient f une fonction ULUCB sur $(X;\sigma\mu)$ et $\mathcal{W} = (W_k)_{k\in N}$ un recouvrement uniforme dénombrable d'ordre fini de $(X;\sigma\mu)$, tel que $f \mid W_k \in \mathcal{U}^{\infty}(W_k;\sigma\mu \mid W_k)$ pour tout $k\in N$. Il existe une partition de l'unité $(h_k)_{k\in N}$ uniformément équicontinue, subordonnée au recouvrement $\mathcal{W}$, et, pour tout $k\in N$, la fonction $g_k = h_k \cdot f$ est uniformément continue sur $(X;\mu)$, d'après le théorème de Katětov. Alors $(g_k)_{k\in N}$ est faiblement uniformément localement finie, et $f = \Sigma g_k$ appartient à $\mathcal{U}(X)$.

c) $\Longrightarrow$ a): soient $(f_1,\dots,f_n)$ une famille finie de fonctions de $\mathcal{U}(X)$ et $g\in C(R^n)$; il existe un recouvrement uniforme $\mathcal{V}$ de $(X;\sigma\mu)$ tel que $[f_1,\dots,f_n]$ soit bornée sur chacun des $V\in\mathcal{V}$; alors $g\circ[f_1,\dots,f_n]$ est uniformément continue et bornée sur chacun des V, donc ULUCB sur $(X;\sigma\mu)$ et tout est dit.

L'équivalence de a) et d) est une évidence.

Dans [5], Z. Frolík introduit une condition très proche de celle abordée dans la définition 1.1, et par une démarche analogue à celle de la démonstration précédente, on obtient:

1.3. <u>Proposition</u>. Soit $(X;\mu)$ un espace uniforme faible; les propriétés suivantes sont équivalents:

a) soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite des fonctions de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$, uniformément localement finie, telle que $f = \sum f_n$ soit bornée; alors f est uniformément continue;

b) soit f une fonction bornée et ULUC, alors f est uniformément continue.

§ 2. <u>Les espaces de type</u> $(\mathcal{E}_{\alpha}^{\infty})$. L'ensemble des recouvrements uniformes d'ordre fini d'un espace $(X;\mu)$ forme une base pour une structure uniforme sur X notée $D_c\mu$ ([6]). Plus généralement si $\aleph_{\alpha}$ est un cardinal, les recouvrements uniformes d'ordre fini et de cardinal strictement inférieur à $\aleph_{\alpha}$ forment aussi une base pour une structure uniforme sur X notée $D_c^{\alpha}\mu$. L'article précité donne des précisions sur ces espaces. En particulier, $D_c^{\alpha}\mu = D_c\mu$ si et seulement si les recouvrements uniformes de $(X;\mu)$ de cardinal strictement inférieur à $\aleph_{\alpha}$ forment une base de μ.

2.1. <u>Lemme</u>. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille discrète de $(X;\mu)$ et $I' = I \cup \{\omega\}$ avec $\omega \notin I$; il existe un recouvrement uniforme d'ordre 2, $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I'}$ tel que $A_i \subset U_i$, $A_i \cap$

$\cap U_\omega = \emptyset$, pour tout $i \in I$, et $U_i \cap U_j = \emptyset$, pour $i \in I$, $j \in I$, $i \neq j$.

Soit d un écart de μ tel que $d(A_i, A_j) \geq 1$ si $i \neq j$; posons:

$$U_\omega = \{x \in X \mid \forall i \in I,\ d(x, A_i) > \tfrac{1}{4}\}$$

$$U_i = \{x \in X \mid d(x, A_i) < \tfrac{1}{2}\} \ .$$

Le recouvrement uniforme formé des boules ouvertes $B_d(x, \frac{1}{8})$ est un raffinement de $\mathcal{U}$, car si $d(x, A_i) < \frac{3}{8}$, alors $B_d(x, \frac{1}{8}) \subset U_i$ et si, pour tout $i \in I$, $d(x, A_i) \geq \frac{3}{8}$, on a $B_d(x, \frac{1}{8}) \subset U_\omega$.

On a comme conséquence immédiate: les espaces $(X; \mu)$ et $(X; D_c \mu)$ (resp. $(X; D_c^\alpha \mu)$)ont les mêmes familles discrètes $(A_i)_{i \in I}$ (resp. avec $\mathrm{Card}(I) < \aleph_\alpha$).

Une étude catégorique des espaces $D_c^\alpha X$ peut être faite en utilisant les résultats généraux de J. Vilímovský([12]). Cependant, pour notre propos, il nous semble plus intéressant de montrer directement:

2.2. <u>Théorème</u>. Le foncteur D_c^α conserve les sous-espaces, i.e. pour toute partie Y de X, on a $(D_c^\alpha \mu) \mid Y = D_c^\alpha (\mu \mid Y)$.

On sait déjà que $(D_c^\alpha \mu) \mid Y$ est une structure moins fine que $D_c^\alpha (\mu \mid Y)$. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement uniforme d'ordre fini de $\mu \mid Y$, de cardinal inférieur à $\aleph_\alpha$. Il existe un écart d_o de μ et un recouvrement uniforme $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ d'ordre fini et de cardinal inférieur à $\aleph_\alpha$ de $\mu \mid Y$, tels que les boules $B_{d_o}(y, 1) \cap Y$, $y \in Y$, forment un $*$-raffinement de $\mathcal{U}$ et que $\mathcal{V}$ soit un raffinement de

$(B_{d_0}(y,1)\cap Y)_{y\in Y}$. On sait qu'il existe une partition finie $(J_k)_{1\leq k\leq m}$ de J telle que pour tout $k\in\{1,\dots,m\}$ la famille $(V_p)_{p\in J_k}$ soit discrète (et de cardinal strictement inférieur à $\aleph_\alpha$ bien entendu) ([10],p. 67).

Soit d_k un écart de $(X;\mu)$ tel que $d_k(V_p,V_q)\geq 1$, pour $p\in J_k$, $q\in J_k$ et $p\neq q$. On pose $d = \bigwedge_{k=0}^{m} d_k$; on construit alors, comme dans 2.1, au moyen de l'écart d, des recouvrements $\mathcal{W}^k = (W^k_\ell)_{\ell\in J_k\cup\{\omega\}}$, d'ordre 2, avec $\omega\notin J$, tels que $V_\ell\subset W^k_\ell$, pour $\ell\in J_k$, et on pose $\mathcal{W} = \mathrm{Sup}(\mathcal{W}^k)$; c'est un recouvrement uniforme, d'ordre fini, de cardinal strictement inférieur à $\aleph_\alpha$. De plus, si $W = W^1_{\ell_1}\cap\dots\cap W^m_{\ell_m}$ est élément de $\mathcal{W}$ et si l'un des indices ℓ_k est différent de ω, on a $W\cap Y = \bigcup B_d(y,1)\cap Y$, $y\in V_{\ell_k}$, et d'après la propriété d'$*$-raffinement, $W\cap Y$ est contenu dans un certain U_i; sinon, $\ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_m = \omega$ implique $W\cap Y=\emptyset$, et $\mathcal{W}|Y$ est un raffinement de $\mathcal{U}$.

2.3. <u>Corollaire</u>. Les espaces $(X;\mu)$ et $(X;D^\alpha_c\mu)$, pour $\alpha\geq 1$, ont simultanément la propriété de $\mathcal{U}$-plongement.

Nous pouvons maintenant étudier le cas général des espaces de type (σ^∞_α).

2.4. <u>Définition</u>. On dit qu'un espace uniforme $(X;\mu)$ est de type (σ^∞_α) si pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ discrète, de fonctions uniformément continues et bornées, avec $\mathrm{Card}(I) < \aleph_\alpha$, la fonction $f = \sum f_i$ est uniformément continue. On dira que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est <u>sommable</u>.

Il est évident que $(X;\mu)$ et $(X;D^\alpha_c\mu)$ sont simultanément de type (σ^∞_α). D'autre part, si $\beta<\alpha$ et $(X;\mu)$ est de type (σ_{α}^{∞}), il est aussi de type (σ_{β}^{∞}). Notons enfin que tout espace est de type (σ_{0}^{∞}) et que le cas particulier fondamental (σ_{1}^{∞}), étudié dans le paragraphe 3, est à l'origine de ce travail.

2.5. <u>Théorème</u>. Les propriétés suivantes d'un espace $(X;\mu)$ sont équivalentes:

a) $(X;\mu)$ est un espace de type (σ_{α}^{∞});

b) $(X;D_c^{\alpha}\mu)$ est un espace de type (σ_{α}^{∞});

c) $(X;D_c^{\alpha}\mu)$ est S^{∞}-fin.

<u>Preuve</u>: soient f une fonction ULUCB sur $(X;D_c^{\alpha}\mu)$ et $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ un recouvrement uniforme d'ordre fini, avec $\mathrm{Card}(I) < \aleph_{\alpha}$, tels que $f \mid V_i$ soit uniformément continue pour la structure $D_c^{\alpha}\mu \mid V_i$, et bornée. Soit $(h_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité uniformément équicontinue subordonnée à $\mathcal{V}$. On a évidemment $f = \sum h_i.f$, et d'autre part $h_i.f \in \mathcal{U}^{\infty}(X;D_c^{\alpha}\mu)$. Soit alors (I_k), $1\leq k\leq m$, une partition finie de I telle que $(V_i)_{i\in I_k}$ soit une famille discrète pour tout entier k, $1\leq k\leq m$; comme $\mathrm{coz}(h_i.f)\subset V_i$, la famille $(h_i.f)_{i\in I_k}$ est discrète et $g_k=\sum_{i\in I_k} h_i.f$ appartient à $\mathcal{U}(X)$; enfin $f = \sum g_k$, montre que $f\in\mathcal{U}(X)$.

Réciproquement, soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille discrète de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ de cardinal strictement inférieur à $\aleph_{\alpha}$. On construit comme dans le lemme 2.1 un recouvrement uniforme d'ordre fini de cardinal strictement inférieur à $\aleph_{\alpha}$, avec la famille discrète $(\mathrm{coz}(f_i))_{i\in I}$; soit $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I\cup\{\omega\}}$ ce recouvrement. En posant $f = \sum f_i$, la restriction $f \mid V_i = f_i \mid V_i$ est uniformément continue sur V_i; d'autre part

$f \mid V_\omega = 0$. Donc f est une fonction ULUCB sur $(X;D_c^\infty \mu)$ et le théorème est établi.

Dans [8], S. Ginsburg et J. Isbell montrent que toute fonction numérique uniformément continue sur une partie Y d'un espace uniforme $(X;\mu)$ peut se prolonger en une fonction ULUCB sur $(X;D_c^\infty \mu)$ (th. 4.12). Ainsi:

2.6. <u>Proposition</u>. Tout espace de type (σ_∞^∞) vérifie la propriété de $\mathcal{U}$-plongement; en particulier tous les espaces S^∞-fins la vérifient.

§ 3. <u>Les espaces de type</u> (σ_1^∞). Ce sont ceux qui joueront un rôle intéressant pour les espaces de mesures. D'autre part on obtient une caractérisation simple de ces espaces. Enfin, sous d'autres formes, on les retrouvent dans l'article [7].

Rappelons que tout espace vérifiant la propriété de $\mathcal{U}$-plongement est tel que $D_c^1 \mu = \sigma\mu$ (cf. [2]).

3.1. <u>Théorème</u>. Les propriétés suivantes d'un espace uniforme $(X;\mu)$ sont équivalentes:

a) $(X;\mu)$ est de type (σ_1^∞);

b) $(X;D_c^1 \mu)$ est de type (σ_1^∞);

c) $(X;D_c^1 \mu)$ est S^∞-fin;

d) $(X;D_c^1 \mu)$ est de type (C) et (U.P);

e) $(X;\mu)$ est de type (C) et (U.P);

f) $(X;\mu)$ est de type (C) et $D_c^1 \mu = \sigma\mu$.

<u>Preuve</u>: on a déjà vu l'équivalence de a), b) et c); c) $\Longrightarrow$ d) d'après 1.2 et 2.6; d) $\Longrightarrow$ e) d'après 2.3; e $\Longrightarrow$ f) provient du rappel ci-dessus; enfin f $\Longrightarrow$ c) d'après 1.2.

Remarque: dans [7], Z. Frolík, J. Pelant et J. Vilímovský donnent un certain nombre de propriétés équivalentes à a); il nous semble nécessaire de les rappeler; pour cela désignons, pour tout ensemble A, par H(A) l'espace métrique des familles $x = (x_a)_{a \in A}$, où $0 \leqq x_a \leqq 1$ et $x_a = 0$ sauf pour un indice au plus, avec la distance $d(x,y) = \sum |x_a - y_a|$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) $\mathcal{U}(X,H(N)) = \mathcal{U}(X,t_f H(N))$;

(2) $\mathcal{U}(X,H(A)) = \mathcal{U}(X,t_f H(A))$ pour tout ensemble infini A;

(3) $\mathcal{U}(Y,R^n) = \mathcal{U}(Y,t_f R^n)$ pour tout entier n et toute partie Y de X;

(4) $\mathcal{U}(Y)$ est une algèbre pour toute partie Y de X;

(5) $\mathcal{U}(Y,[0,1] \times N) = \mathcal{U}(X,t_f([0,1] \times N))$ pour toute partie Y de X;

(6) toute suite discrète de fonctions de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ est sommable;

(7) toute fonction ULUCB sur $(X;D_c^1\mu)$ est uniformément continue;

(8) $(X;\mu)$ est de type (C) et (U.P);

(9) $(X;\mu)$ est de type (C) et $D_c^1\mu = \sigma\mu$;

(10) $\mathcal{U}(X)$ est une algèbre et $(X;\mu)$ est (U.P);

(11) pour toute suite $(B_n)_{n \in N}$ uniformément discrète de $(X;\mu)$ et toute décomposition $B_n = \bigcup A_{nk}$, $k = 1,\dots,k_n$ telle que pour tout n les A_{nk}, $k = 1,\dots,k_n$ forment une famille discrète, alors la famille $((A_{nk}), k = 1,\dots,k_n)_{n \in N}$ est discrète.

Parmi ces diverses propriétés soulignons le gain entre la propriété (8) et la propriété (10), la propriété (U.P) permettant de passer de l'existence du produit de deux fonctions uniformément continues (prop. 10) à la composition généralisée (prop. 8). Une démonstration directe de ce fait serait intéressante.

3.2. <u>Corollaire</u>. Les propriétés suivantes d'un espace uniforme <u>faible</u> $(X;\mu)$ sont équivalentes:

a) $\mathcal{U}(X)$ est une algèbre et $(X;\mu)$ est (U.P);

b) $\mathcal{U}(X)$ est stable par composition;

c) toute fonction numérique ULUCB est uniformément continue;

d) toute suite discrète de fonctions de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ est sommable.

Les propriétées de stabilité des espaces de type (σ_1^{∞}) s'obtiennent facilement:

3.3. <u>Proposition</u>. a) Les espaces (σ_1^{∞}) sont stables par passage au complété; b) les espaces (σ_1^{∞}) sont stable par passage aux sous-espaces.

La première propriété est évidente; la seconde s'établit en remarquant que les propriétés (C) et (U.P) entrainent la propriété (C) pour toute partie $Y \subset X$.

Pour terminer, remarquons que l'on peut dans la définition 2.4 ne pas imposer aux fonctions qui constituent la famille $(f_i)_{i \in I}$ d'être bornées. On obtient alors les espaces de type (σ_{α}). Il est clair que la propriété (σ_{α}) implique la propriété $(\sigma_{\alpha}^{\infty})$, et qu'ainsi tout espace de type (σ_{α}) vérifie a fortiori la propriété de $\mathcal{U}$-plongement. D'où:

3.4. <u>Théorème</u>. Un espace $(X;\mu)$ est de type (σ_{α}) ssi

$(X;D_c^{\alpha}\mu)$ est simplement fin.

La démonstration est la même que celle de 2.5; le fait que les $h_i.f$ appartiennent à $\mathcal{U}(X;D_c^{\alpha}\mu)$ qui provenait du théorème de Katětov, est ici conséquence du $\mathcal{U}$-plongement que l'on vient d'établir.

B i b l i o g r a p h i e

[1] N. AZZAM: Mesures sur un espace uniforme, Thèse de Doctorat de Spécialité, Université Claude Bernard, Lyon I; Prépublications du Département de Mathématiques, n° 2 juin 1974, Saint-Etienne.

[2] H.H. CORSON and J.R. ISBELL: Some properties of strong uniformities, Quart. J. Math. Oxford 11(1960), 17-33.

[3] A. DEAIBES: Mesures sur les espaces uniformes de type $(\mathcal{G}_{\infty}^{\infty})$, à paraître.

[4] A. DEAIBES: Espaces uniformes et espaces de mesures, Publications du Département de Math. Lyon, 12(1975), 1-166.

[5] Z. FROLÍK: Locally e-fine measurable spaces, Trans. Am. Math. Soc. 196(1974), 237-247.

[6] Z. FROLÍK: Three technical tools in uniform spaces, Seminar Uniform Spaces 1973-1974, Prague (1975), 1-26.

[7] Z. FROLÍK, J. PELANT, J. VILÍMOVSKÝ: On hedgehog-topologically fine uniform spaces, Seminar Uniform Spaces 1975-1976, 75-86, Prague.

[8] S. GINSBURG and J.R. ISBELL: Some operators on uniform spaces, Trans. Am. Math. Soc. 93(1959),145-168.

[9] J.R. ISBELL: Algebras of uniformly continuous functions, Ann. of Math. 68(1958), 96-124.

[10] J.R. ISBELL: Uniform spaces, Math. Surveys n° 12, A.M.S. Providence 1974.

[11] R. PUPIER: Sur quelques types d'espaces uniformes, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 277(1973), 417-419.

[12] J. VILÍMOVSKÝ: Categorial refinements and their relation to reflective subcategories, Seminar Uniform Spaces 1973-1974, Prague (1975), 83-111.

A.D. Université Claude Bernard
43; Bd. du Onze Novembre 1918
69100 Villeurbanne
France

R.P. U.E.R. des Sciences
23, rue du Dr. P. Michelon
42100 Saint-Etienne
France

(Oblatum 16.2. 1977)