

Konstantin Igorevich Beidar

Идемпотенты в кольцах с полиномиальным тождеством

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 22 (1981), No. 4, 755--759

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/106117>

## Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1981

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## ИДЕМПОТЕНТЫ В КОЛЬЦАХ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ТОЖДЕСТВОМ

К.И. ВЕЙДАР

**Abstract:** In this note we constructed an example of a ring with polynomial identity without nonzero idempotents the ring of  $2 \times 2$ -matrices over which has an infinite family of nonzero pair-wise orthogonal idempotents. This example gives a negative answer on one question of L. Small.

**Key words:** Polynomial identity, idempotent.

**Classification:** 16A38, 16A42.

---

Хорошо известно, что если кольцо  $M_n(R)$  —  $n \times n$ -матриц над коммутативным кольцом  $R$  содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов, то кольцо  $R$  тоже содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов. В связи с этим Смолл поставил вопрос: если  $R$  — кольцо с полиномиальным тождеством и кольцо  $M_n(R)$  содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов, то будет ли кольцо  $R$  содержать бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов? [3, стр. 381, пункт 3Q].

В данной работе строится пример PI-кольца не содержащего ненулевых идемпотентов такого, что кольцо  $2 \times 2$ -матриц над ним содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов. Тем самым дается отрицательный

ответ на этот вопрос Смолла.

Отметим, что аналогичный пример получен также А.З. Анянь-иним (устное сообщение).

Пусть  $Z$  - кольцо целых чисел,  $A = Z[x_1, x_2, x_3, x_4]$  - кольцо многочленов над  $Z$ ,  $y = x_2 + x_3$ ,  $B = A_y$  - локализация кольца  $A$  по мультипликативно замкнутому подмножеству  $\{1, y, y^2, \dots, y^m, \dots\}$ . Положим

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть  $\mathcal{D} = M_2(B)$  - кольцо  $2 \times 2$ -матриц над кольцом  $B$ ,  $E = \sum_{i=1}^4 x_i B \subseteq \mathcal{D}$ . Ясно, что  $x_i x_j = x_{k(i,j)} x_{t(i,j)}$  для всех  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Следовательно  $E$  - подкольцо кольца  $\mathcal{D}$ . Очевидно, что кольцо  $E$  удовлетворяет всем тождествам кольца  $M_2(B)$ .

**Лемма 1.** Пусть  $e_{ij}$  - матрица размера  $2 \times 2$  у которой на  $(i, j)$ -месте стоит 1, а на остальных местах стоят нули. Тогда: 1. Элемент  $u = e_{11} x_3 y^{-1} + e_{12} x_4 y^{-1} + e_{21} x_1 y^{-1} + e_{22} x_2 y^{-1}$  является идемпотентом кольца  $M_2(E)$ . 2. Кольцо  $E$  не содержит ненулевых идемпотентов.

**Доказательство.** 1. Ясно, что кольцо  $M_2(E)$  является подкольцом кольца  $M_4(B)$ . Первое утверждение теперь проверяется с помощью правила перемножения матриц в кольце  $M_4(B)$ .

2. Предположим противное. Пусть  $e = \sum_{i=1}^4 x_i r_i$  (где  $r_i \in B, 1 \leq i \leq 4$  - ненулевой идемпотент кольца  $E$ ). Положим

$$x = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_2 & r_1 \\ r_4 & r_3 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что  $x, r \in \mathcal{D}$  и  $e = rx$ . Значит,  $\mathcal{D}x \ni e$ . Так как элемент  $\det x = x_2 x_3 - x_1 x_4$  не является обратным в коль-

не  $B$ , то матрица  $x$  не является обратимой в кольце  $M_2(B) = \mathcal{D}$ . Поэтому  $\mathcal{D}x \neq 1$  и  $e \neq 1$ . Далее, пусть  $F = B \oplus B$  - свободный  $B$ -модуль ранга 2. отождествим кольца  $\mathcal{D} = M_2(B)$  и  $\text{End}_B F$ . Имеем:  $F = Fe \oplus F(1-e)$ . Так как  $F$  - свободный модуль ранга 2 над областью целостности  $B$  и  $Fe \neq 0 \neq F(1-e)$ , то  $Fe$  и  $F(1-e)$  - проективные модули ранга 1 [1, стр. 114, Теорема 7.1]. Очевидно, что  $B = Z[x_1, x_2, x_3, x_4]_y$  - кольцо с однозначным разложением на простые множители. Пусть  $S$  - множество ненулевых элементов кольца  $B$  и  $S^{-1}B$  - локализация кольца  $B$  относительно мультипликативно замкнутой системы  $S$ . Ясно, что система  $S$  порождается простыми элементами, каждый из которых порождает в кольце  $B$  простой идеал. Далее, очевидно, что  $S^{-1}B$  - поле частных кольца  $B$ . Поэтому проективные  $S^{-1}B$ -модули ранга 1 являются свободными модулями. Из [1, стр. 125, Предложение 7.15] теперь следует, что проективные  $B$ -модули ранга 1 являются свободными модулями. Следовательно существует обратимая матрица  $w \in M_2(B)$  такая, что

$$(ж) \quad w^{-1}ew = e_{11}.$$

Пусть  $G$  - дедекиндово кольцо с нетривиальной группой классов идеалов. Тогда кольцо  $G$  содержит некоторый идеал  $L$  не являющийся главным идеалом. Из [2, стр. 22, Лемма 1.7] следует, что  $G$ -модуль  $L \oplus L^{-1}$  изоморфен модулю  $G \oplus G$ . отождествим модули  $G \oplus G$  и  $L \oplus L^{-1}$ . Ясно, что  $\text{End}_G(G \oplus G) = M_2(G)$ . Пусть

$$w = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in G, \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

эндоморфизм  $G$ -модуля  $G \oplus G$ , соответствующий канонической проекции на прямое слагаемое  $L$ . Ясно, что  $v$  - идемпотентная матрица ранга 1. Значит,  $tvv = a_{11} + a_{22} = 1$ . Определим гомоморфизм колец  $f: A \rightarrow G$ , полагая  $f(x_1) = a_{21}$ ,  $f(x_2) = a_{22}$ ,  $f(x_3) = a_{11}$ ,  $f(x_4) = a_{12}$ . Тогда  $f(y) = a_{11} + a_{22} = 1$ . Следовательно гомоморфизм  $f$  продолжается до гомоморфизма колец  $f: A_{12} \rightarrow G$ . Ясно, что гомоморфизм  $f$  определяет гомоморфизм колец  $g = M_2(f): M_2(B) \rightarrow M_2(G)$ . Отметим, что  $g(x) = v$ ,  $g(e_{11}) = e_{11}$ ,  $g(rx) = g(r)g(x) = g(r)v$ . Положим  $b = g(rx)$ ,  $d = g(v)$ . Из равенства (\*) и доказанного выше теперь следует, что  $d^{-1}bd = e_{11}$ ,  $bv = b$ ,  $b^2 = b$ . Следовательно  $G$ -модуль  $(G \oplus G)b$  изоморфен  $G$ -модулю  $G$ . Очевидно, что выполняются следующие соотношения:  $G \oplus G = (G \oplus G)b \oplus (G \oplus G)(1-b)$ ,  $(G \oplus G)b \subseteq (G \oplus G)v = L$ . Так как  $G$ -модуль  $(G \oplus G)b$  выделяется прямым слагаемым в  $G$ -модуле  $G \oplus G$ , то он выделяется прямым слагаемым в любом подмодуле модуля  $G \oplus G$  его содержащем. Значит,  $(G \oplus G)b$  - прямое слагаемое  $G$ -модуля  $L$ . Но  $L$  - идеал области целостности. Следовательно он не разложим в прямую сумму ненулевых  $G$ -модулей. Поэтому  $(G \oplus G)b = L$  и  $L$  - главный идеал кольца  $G$ . Получили противоречие с выбором идеала  $L$ . Поэтому кольцо  $E$  не содержит ненулевых идемпотентов.

**Теорема 1.** Пусть  $R = \prod_{i=1}^{\infty} R_i$  - прямое произведение колец  $R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , каждое из которых равно кольцу  $E$ . Тогда:

1. Кольцо  $R$  удовлетворяет всем тождествам кольца  $2 \times 2$ -матриц над полем рациональных чисел.
2. Кольцо  $R$  не содержит ненулевых идемпотентов.
3. Кольцо  $2 \times 2$ -матриц над коль-

цом  $R$  содержит бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов.

Доказательство. Первые два утверждения теоремы непосредственно вытекают из доказанного в лемме 1 и из построения кольца  $E$ . Докажем третье утверждение. Пусть  $a_{i11}, a_{i12}, a_{i21}, a_{i22}$  - элементы кольца  $R$ ,  $i$ -ая координата которых равна  $x_3 y^{-1}, x_4 y^{-1}, x_1 y^{-1}, x_2 y^{-1}$  соответственно, а все остальные координаты равны нулю. Далее, пусть

$$\mu_i = e_{11} a_{i11} + e_{21} a_{i21} + e_{12} a_{i12} + e_{22} a_{i22} \in M_2(R).$$

Тогда из леммы 1 следует, что  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, \dots\}$  - бесконечное множество ненулевых попарно ортогональных идемпотентов.

Итак, теорема доказана.

#### Л и т е р а т у р а

- [1] ВАСС Х.: Алгебраическая К-теория, Москва, Мир, 1973.
- [2] МИНОР Дж.: Введение в алгебраическую К-теорию, Москва, Мир, 1974.
- [3] - Rings Theory, Proc. Conf. Park City, Utah, 1971, New York, Acad. Press, 1972, XI, 381 pp., Publisher's Weekly, 1972, 202, N 3, 129.

Мех.-мат. факультет, кафедра высшей алгебры, Московский Государственный Университет, Москва В-234, С С С Р

(Oblatum 8.6. 1981)