

Jacques Bair

Retour sur les caractères fermé et relativement ouvert du cône-barrière d'un convexe

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 26 (1985), No. 2, 315--318

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/106371>

Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1985

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

**RETOUR SUR LES CARACTERES FERME ET RELATIVEMENT
OUVERT DU CONE-BARRIERE D'UN CONVEXE**

Jacques BAIR

Résumé. Nous caractérisons les convexes de dimension finie dont le cône-barrière, éventuellement privé de certains de ses sommets, est relativement ouvert. Ensuite, nous décrivons les convexes de \mathbb{R}^n dont la barrière est fermée, à la condition que leur cône d'infinitude soit polyédrique (ce qui est toujours le cas dans le plan).

Mots clefs : convexe, cône-barrière, relativement continu, hyperbolique.

Classification : 52 A 20.

Brøndsted a obtenu une condition nécessaire et suffisante permettant de reconnaître les ensembles convexes A de l'espace numérique \mathbb{R}^n pour lesquels le cône-barrière, noté $\mathbb{B}(A)$, est ouvert à la condition de lui enlever l'origine [IV; Corollary (i), p. 338]; ce résultat excluait le cas d'ensembles convexes contenant des droites puisque la barrière est alors forcément de dimension strictement inférieure à n . Récemment, nous avons levé cette restriction en caractérisant géométriquement les convexes A de \mathbb{R}^n pour lesquels $\mathbb{B}(A) \setminus \{0\}$ est algébriquement ouvert, c'est-à-dire relativement ouvert ou encore ouvert dans leur enveloppe linéaire [I; 42, p. 739]; dans cette étude, nous avons travaillé (sans l'explicitier assez clairement) sur des corps convexes, c'est-à-dire sur des convexes dont l'intérieur n'est pas vide; malheureusement, le résultat annoncé ne peut pas être étendu tel quel à des convexes de dimension inférieure à n , ainsi qu'en atteste, dans \mathbb{R}^3 , l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0, x_2 > x_1^2\}$, pour lequel $\mathbb{B}(A) \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0, x_3 \neq 0\}$ n'est pas ouvert bien que A soit relativement continu (c'est-à-dire continu dans son enveloppe linéaire [I; p. 739]).

En fait, on peut vérifier que, pour tout convexe non vide A de \mathbb{R}^n , la barrière relative $\hat{\mathbb{B}}(A) = \{x \in {}^1A : \sup_{y \in A} \langle x, y \rangle < +\infty\}$, où 1A désigne l'enveloppe linéaire

(affine hull) de A , donne lieu à l'égalité suivante : $\mathbb{B}(A) \setminus {}^1A = \hat{\mathbb{B}}(A) \setminus \{a\} + {}^1A$, où 1A désigne le sous-espace vectoriel orthogonal au sous-espace vectoriel ${}^1A - {}^1A$ parallèle à A et a est le point (unique) où 1A rencontre

¹A. Comme $\mathbb{B}(A) \setminus \overset{1}{A}$ et $\hat{\mathbb{B}}(A) \setminus \{a\}$ sont visiblement algébriquement ouverts simultanément, le raisonnement utilisé en [I] conduit à ce résultat (qui rectifie l'énoncé 4.2 de [I]).

Proposition 1. Soit A un convexe non vide de \mathbb{R}^n . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) $\mathbb{B}(A) \setminus \overset{1}{A}$ est algébriquement ouvert;
- b) $\hat{\mathbb{B}}(A) \setminus \{a\}$ est algébriquement ouvert;
- c) \bar{A} est la somme directe d'un ensemble relativement continu et d'un sous-espace vectoriel.

Il est à noter que le corollaire 4.3 de [I] reste d'application: pour tout ensemble laminé A (à savoir A est un convexe non borné pour lequel existe un borné B tel que A soit inclus dans la somme vectorielle de B et du sous-espace caractéristique $\mathbb{E}(A)$ composé de l'origine et de toutes les droites homogènes dont un translaté au moins est contenu dans A [I ; p. 736]), $\mathbb{B}(A) \setminus \{0\}$ est algébriquement ouvert [I ; p.739], puisque $\mathbb{B}(A)$ coïncide alors avec le sous-espace vectoriel orthogonal à $\mathbb{E}(A)$. Par ailleurs, un convexe A non borné et non laminé pour lequel $\mathbb{B}(A) \setminus \{0\}$ est algébriquement ouvert doit être de dimension égale à n , sinon la crête (ou ensemble des sommets) de $\mathbb{B}(A)$ contiendrait le sous-espace vectoriel ¹A qui ne se réduirait pas à $\{0\}$, ce qui serait en contradiction avec le caractère relativement ouvert de $\mathbb{B}(A) \setminus \{0\}$. En conclusion, on peut obtenir cet énoncé:

Proposition 2. Pour un convexe A de \mathbb{R}^n , $\mathbb{B}(A) \setminus \{0\}$ est algébriquement ouvert si et seulement si \bar{A} est un ensemble continu (soit un compact, soit un corps non borné et relativement continu), ou A est laminé.

Terminons cette brève mise au point concernant le caractère algébriquement ouvert du cône-barrière en constatant que la barrière $\mathbb{B}(A)$ elle-même est algébriquement ouverte sous la condition nécessaire et suffisante qu'elle coïncide avec un sous-espace vectoriel, soit l'espace \mathbb{R}^n tout entier, soit un sous-espace de dimension inférieure à n . Cette observation conduit au résultat suivant:

Proposition 3. Pour un convexe A de \mathbb{R}^n , le cône-barrière $\mathbb{B}(A)$ est relativement ouvert si et seulement si A est borné ou laminé.

Quant au caractère fermé de la barrière, il est étroitement relié à la notion d'ensemble hyperbolique introduite par Sablon [V], à la suite d'une suggestion du Professeur Valette. Rappelons que nous qualifions d'hyperbolique tout convexe A non borné pour lequel existe un borné B tel que A soit inclus dans la somme vectorielle de B et du cône d'infinitude $\mathbb{I}(A)$ composé de l'origine

et de toutes les demi-droites, pointées en O, dont un translaté au moins est inclus dans A [II; p. 182]. Bien entendu, la barrière d'un hyperbolique A est fermée car elle est le polaire de $\mathbf{I}(A)$; nous avons démontré la réciproque de cette propriété par une argumentation faite essentiellement dans \mathbb{R}^2 (sans qu'il le soit d'ailleurs explicitement indiqué) [II; Proposition 5, p. 183]. Voici un exemple montrant qu'il n'y a pas équivalence, hors de \mathbb{R}^2 , entre les hyperboliques et les convexes à barrière fermée: dans \mathbb{R}^3 , si C désigne le cône circulaire droit $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$ et B l'ensemble infini $\{y_p = p.k_p (\cos \frac{1}{p}, \sin \frac{1}{p}, \cos \frac{1}{p}) : k_p = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2p}}, \text{ pour tout entier naturel } p = 1, 2, 3, \dots\}$, l'enveloppe convexe fermée A de la réunion $B \cup C$ est telle que $\mathbf{I}(A) = C, \mathbb{B}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$, tandis que $d(y_p, C) = \frac{\sqrt{2}}{2} p$, ce qui montre que $\mathbb{B}(A)$ est fermé et qu'il n'existe aucun borné dont la somme avec $\mathbf{I}(A)$ inclut A. L'idée originale de cet exemple est due à Goossens qui publiera, avec plus de détails, ce passage et donnera des résultats nouveaux sur le sujet. Pour notre part, contentons-nous de donner, dans \mathbb{R}^n , cette généralisation de la caractérisation des convexes de dimension 2 dont la barrière est fermée: elle concerne les convexes non bornés dont le cône d'infinitude est polyédrique, condition qui est automatiquement satisfaite dans le plan.

Proposition 4. Soit A un convexe non borné de \mathbb{R}^n dont le cône d'infinitude $\mathbf{I}(A)$ est polyédrique; $\mathbb{B}(A)$ est fermé si et seulement si A est hyperbolique.

De fait, si A est hyperbolique, on a toujours $\mathbb{B}(A) = \star \mathbf{I}(A)$, où $\star \mathbf{I}(A)$ désigne le polaire de $\mathbf{I}(A)$ à savoir le cône $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 0, \forall x \in \mathbf{I}(A)\}$; il en résulte que $\mathbb{B}(A)$ est fermé sans aucune restriction sur $\mathbf{I}(A)$. Réciproquement, supposons $\mathbb{B}(A)$ fermé, donc coïncidant avec $\star \mathbf{I}(A)$; si $\mathbf{I}(A)$ est polyédrique, il existe des formes linéaires f_i non nulles telles que $\mathbf{I}(A) = \bigcap_{i=1}^p \{x: f_i(x) \leq 0\}$; pour tout indice i de 1 à p, f_i appartient à $\star \mathbf{I}(A)$, donc à $\mathbb{B}(A)$, ce qui garantit l'existence d'un réel λ_i pour lequel $A \subset \{x: f_i(x) \leq \lambda_i\}$; dès lors, A est inclus dans $P = \bigcap_{i=1}^p \{x: f_i(x) \leq \lambda_i\}$; P est un polyèdre convexe dont le cône d'infinitude n'est autre que $\bigcap_{i=1}^p \{x: f_i(x) \leq 0\}$ [III; III.1.3, p. 54]. P peut s'écrire comme la somme d'un polytope B et de $\mathbf{I}(A)$ [III; III.3.2, p. 70]; au total, A est hyperbolique puisqu'il est inclus dans $B + \mathbf{I}(A)$.

Bibliographie

- [I] J. BAIR, Quelques questions soulevées par le cône-barrière d'un convexe, Comment. Math. Univ. Carolinae 24,4 (1983), 731-740.
- [II] J. BAIR, Liens entre le cône d'ouverture interne et l'internat du cône asymptotique d'un convexe, Bull. Soc. Math. Belgique XXXV, série B (1983), 177-187.
- [III] J. BAIR - R. FOURNEAU, Etude géométrique des espaces vectoriels II: les polyèdres et polytopes convexes, Lecture Notes in Math., vol 802, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York, 1980.
- [IV] A. BRØNDSTED, The inner aperture of a convex set, Pacific J. Math. 72 (1977), 335-340.
- [V] D. SABLON, Ensembles convexes et cônes associés, mémoire de licence, Bruxelles, édition ronéotypée, 1980.

Institut de Mathématique
Université de Liège
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 Liège (Belgique)

(Oblatum 16.11. 1984)