Roland Lemmert

Zur Eindeutigkeitsbedingung von Nagumo

Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 29 (1988), No. 2, 293--294

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/106639

COMMENTATIONES MATHEMATICAE UNIVERSITATIS CAROLINAE
29,2 (1988)

ZUR EINDEUTIGKEITSBEDINGUNG VON NAGUMO

Roland LEMMERT

Abstract: A transformation of the independent variable is given which transforms general Lipschitz-type conditions for the right hand side of Cauchy's problem in a Banach space into Nagumo's condition.

Key words: Ordinary differential equations in Banach spaces. Nagumo's condition.

Classification: 34G20

Verschiedentlich (vgl. Banaś und Rivero [2] und die dort zitierte Literatur) wurden für die Anfangswertaufgabe

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{c} x'(t)=f(t,x(t)),\ t\in(0,1] \\ x(0)=x_0 \end{array}\right\}$$

Eindeutigkeitsbedingungen der Form

$$(2)\qquad |f(t,x)-f(t,y)|\le a(t)|x-y|$$

betrachtet mit einer in (0,1] stetigen und positiven Funktion a. In [3] wurde (1) vermöge

$$(3)\qquad \tau(t)=\exp(\int_1^t a(s)ds)-\exp(\int_1^0 a(s)ds$$

$$(4)\qquad \xi(\tau)=x(t)$$

in

$$(5)\qquad \left.\begin{array}{c} \xi'(\tau)=\varphi(\tau,\xi(\tau)),\ \ \tau\in(0,\tau(1)] \\ \xi(0)=x_0 \end{array}\right\}$$

transformiert; dabei ist φ durch

$$(6)\qquad \varphi(\tau,\xi)=f(t(\tau),\xi)/a(t(\tau))\exp(\int_1^t a(s)ds)$$

gegeben und (2) geht über in

(7) $$|\varphi(\tau,\xi)-\varphi(\tau,\eta)|\leq|\xi-\eta|/(\tau+\tau_0)$$

mit $\tau_0=\exp(\int_1^0 a(s)ds)\geq 0$. (7) ist (im ungünstigsten Fall $\tau_0=0$, d.h. $\int_1^0 a(s)ds=-\infty$) die wohlbekannte Nagumobedingung.

Nun lässt sich die angegebene Transformation (wie in [3] angedeutet) auch im Fall anwenden, wenn (1) in einem Banachraum E betrachtet wird. Aufgrund der speziellen Gestalt von φ nach (6) werden sämtliche uns bekannten Bedingungen an f, die mit Existenz, Eindeutigkeit, monotonem Verhalten, usw. zu tun haben, in die entsprechende Bedingung an φ unter der Nagumobedingung überführt. So geht etwa die Voraussetzung (3) aus [2] in $|\varphi(\tau,x)-\varphi(\tau,y)|=o(1)$ für $\tau\to 0$ über. Hieraus erkennt man, dass (3) aus [1] unnötig einschränkend ist; es genügt zu fordern, dass $f(t,x)/a(t)\, e^{A(t)}$ stetig auf $[0,1]$ fortsetzbar ist. Übrigens wird auch Lemma 1 aus [2] durch (3), (4) auf den Fall der Nagumobedingung reduziert.

Folgt man einer Idee von Olech [4], vgl. auch Banaś [1], und setzt (bezüglich Theorem 3 in [2]) o.B.d.A. $x_0=0$ und

$$w(t,s)=\sup\{\mu(f(t,X)):X\subseteq K(0,\tau),\ \mu(X)\leq s\},$$

so liefern (6), (7) aus [2]

$$\mu(f(t,X))\leq w(t,\mu(X)),\quad t\in(0,1],\ X\subseteq K(0,\tau),$$

$$(*)\qquad \left.\begin{array}{ll} w(t,s)\leq a(t)\cdot s, & t\in(0,1],\ 0\leq s<\tau, \\ w(t,s)=o(a(t)\exp(A(t))), & t\to 0 \text{ glm. in } s. \end{array}\right\}$$

Aus ($*$) folgt sofort (etwa vermittels Lemma 1 [2]), dass w eine (beschränkte) Kamkefunktion ist. Satz 3 aus [2] folgt dann aus dem dort zitierten Ergebnis von Szufla.

Literatur

[1] BANAŚ J.: On existence theorems for differential equations in Banach spaces, Bull. Austr. Math. Soc. 32(1985), 73-82.

[2] BANAŚ J. and J. RIVERO: Remarks concerning J. Witte's Theorem and its applications, Comment. Math. Univ. Carolinae 26(1987), 23-31.

[3] LEMMERT R.: Über einen Satz von Witte, Math. Z. 145(1975), 289-291.

[4] OLECH C.: Remarks concerning criteria for uniqueness of solutions of ordinary differential equations, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 8(1960), 661-666.

Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, Kaiserstr. 12, D-7500 Karlsruhe 1, B R D

(Oblatum 10.12. 1987)