

Roland Lemmert

Zur Eindeutigkeitsbedingung von Nagumo

*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 29 (1988), No. 2, 293--294

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/106639>

## Terms of use:

© Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 1988

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ZUR EINDEUTIGKEITSBEDINGUNG VON NAGUMO

Roland LEMMERT

**Abstract:** A transformation of the independent variable is given which transforms general Lipschitz-type conditions for the right hand side of Cauchy's problem in a Banach space into Nagumo's condition.

**Key words:** Ordinary differential equations in Banach spaces. Nagumo's condition.

**Classification:** 34G20

---

Verschiedentlich (vgl. Banaś und Rivero [2] und die dort zitierte Literatur) wurden für die Anfangswertaufgabe

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)), \quad t \in (0, 1] \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\}$$

Eindeutigkeitsbedingungen der Form

$$(2) \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq a(t) |x - y|$$

betrachtet mit einer in  $(0, 1]$  stetigen und positiven Funktion  $a$ . In [3] wurde

(1) vermöge

$$(3) \quad \tau(t) = \exp\left(\int_1^t a(s) ds\right) - \exp\left(\int_1^0 a(s) ds\right)$$

$$(4) \quad \xi(\tau) = x(t)$$

in

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} \xi'(\tau) &= \varphi(\tau, \xi(\tau)), \quad \tau \in (0, \tau(1)] \\ \xi(0) &= x_0 \end{aligned} \right\}$$

transformiert; dabei ist  $\varphi$  durch

$$(6) \quad \varphi(\tau, \xi) = f(t(\tau), \xi) / a(t(\tau)) \exp\left(\int_1^t a(s) ds\right)$$

gegeben und (2) geht über in

$$(7) \quad |\varphi(\tau, \xi) - \varphi(\tau, \eta)| \leq |\xi - \eta| / (\tau + \tau_0)$$

mit  $\tau_0 = \exp\left(\int_1^0 a(s) ds\right) \geq 0$ . (7) ist (im ungünstigsten Fall  $\tau_0 = 0$ , d.h.  $\int_1^0 a(s) ds = -\infty$ ) die wohlbekannte Nagumobedingung.

Nun lässt sich die angegebene Transformation (wie in [3] angedeutet) auch im Fall anwenden, wenn (1) in einem Banachraum  $E$  betrachtet wird. Aufgrund der speziellen Gestalt von  $\varphi$  nach (6) werden sämtliche uns bekannten Bedingungen an  $f$ , die mit Existenz, Eindeutigkeit, monotonem Verhalten, usw. zu tun haben, in die entsprechende Bedingung an  $\varphi$  unter der Nagumobedingung überführt. So geht etwa die Voraussetzung (3) aus [2] in  $|\varphi(\tau, x) - \varphi(\tau, y)| = o(1)$  für  $\tau \rightarrow 0$  über. Hieraus erkennt man, dass (3) aus [1] unnötig einschränkend ist; es genügt zu fordern, dass  $f(t, x)/a(t) e^{A(t)}$  stetig auf  $[0, 1]$  fortsetzbar ist. Übrigens wird auch Lemma 1 aus [2] durch (3), (4) auf den Fall der Nagumobedingung reduziert.

Folgt man einer Idee von Olech [4], vgl. auch Banas [1], und setzt (bezüglich Theorem 3 in [2]) o.B.d.A.  $x_0 = 0$  und

$$w(t, s) = \sup \{ \mu(f(t, X)) : X \in K(0, \tau), \mu(X) \leq s \},$$

so liefern (6), (7) aus [2]

$$\begin{aligned}
 & \mu(f(t, X)) \leq w(t, \mu(X)), \quad t \in (0, 1], \quad X \in K(0, \tau), \\
 & w(t, s) \leq a(t) \cdot s, \quad t \in (0, 1], \quad 0 \leq s < \tau, \\
 (*) \quad & w(t, s) = o(a(t) \exp(A(t))), \quad t \rightarrow 0 \text{ glm. in } s.
 \end{aligned}$$

Aus (\*) folgt sofort (etwa vermittelt Lemma 1 [2]), dass  $w$  eine (beschränkte) Kamkefunktion ist. Satz 3 aus [2] folgt dann aus dem dort zitierten Ergebnis von Szufly.

#### Literatur

- [1] BANAS J.: On existence theorems for differential equations in Banach spaces, Bull. Austr. Math. Soc. 32(1985), 73-82.
- [2] BANAS J. and J. RIVERO: Remarks concerning J. Witte's Theorem and its applications, Comment. Math. Univ. Carolinae 26(1987), 23-31.
- [3] LEMMERT R.: Über einen Satz von Witte, Math. Z. 145(1975), 289-291.
- [4] OLECH C.: Remarks concerning criteria for uniqueness of solutions of ordinary differential equations, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 8(1960), 661-666.

Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, Kaiserstr. 12, D-7500 Karlsruhe 1, B R D

(Oblatum 10.12. 1987)