

Jan Mařík

Poznámka o délce Jordanovy křivky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 1, 91--96

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108183>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

POZNÁMKA O DÉLCE JORDANOVY KŘIVKY

JAN MAŘÍK, Praha

DT: 513.83

(Došlo dne 17. dubna 1957)

Autor dokazuje, že délka Jordanovy křivky s vnitřkem G je supremem množiny čísel

$$\int_G \left(\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial y} \right) dx dy,$$

kde v_1, v_2 jsou polynomy, splňující nerovnost $v_1^2(x, y) + v_2^2(x, y) \leq 1$ pro všechna $[x, y] \in G$.

1. Symbol E_1 (resp. E_2) označuje množinu všech reálných (resp. komplexních) čísel. Dvojici reálných čísel $[x, y]$ ztotožňujeme s komplexním číslem $x + iy$. Funkci dvou reálných proměnných budeme tedy pokládat též za funkci komplexní proměnné nebo naopak. Reálnou (resp. imaginární) část komplexní funkce f budeme vždy značit symbolem f_1 (resp. f_2).

Buď f spojitá komplexní funkce, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Necht $f(a) = f(b)$ a necht platí implikace

$$(t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle, 0 < |t_1 - t_2| < b - a) \Rightarrow f(t_1) \neq f(t_2).$$

Potom množinu $C = f(\langle a, b \rangle)$ nazveme Jordanovou křivkou (a řekneme, že funkce f určuje Jordanovu křivku C). Množina $E_2 - C$ má dvě komponenty a křivka C je jejich společnou hranicí. Tyto komponenty jsou ovšem oblasti (t. j. otevřené souvislé množiny). Jedna z nich je omezená; ta se nazývá vnitřek křivky C . Druhá (neomezená) oblast se nazývá vnějšek C .

Je-li h komplexní (nebo reálná) funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$, položíme

$$\text{var}(h, a, b) = \text{var}(h) = \sup_D \sum_{j=1}^n |h(t_j) - h(t_{j-1})|,$$

kde $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ probíhá všechna dělení intervalu $\langle a, b \rangle$.

Jestliže funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$ určuje touž Jordanovu křivku C jako funkce g v intervalu $\langle c, d \rangle$, je $\text{var}(f, a, b) = \text{var}(g, c, d)$; tuto hodnotu (která ovšem nemusí být konečná) nazveme délkou křivky C .

Pro libovolnou komplexní funkci h v intervalu $\langle a, b \rangle$ platí

$$\max(\operatorname{var}(h_1), \operatorname{var}(h_2)) \leq \operatorname{var}(h) \leq \operatorname{var}(h_1) + \operatorname{var}(h_2), \quad (1)$$

jak se snadno dokáže. (Zde jsou ovšem — podle úmluvy — funkce h_1, h_2 reálné a je $h = h_1 + ih_2$.)

Množinu všech spojitých komplexních funkcí h v intervalu $\langle a, b \rangle$, pro něž je $\operatorname{var}(h) < \infty$, označíme symbolem $V(a, b)$. Dále buď $V_0(a, b)$ množina všech $h \in V(a, b)$, pro něž $h(a) = h(b)$.

Jsou-li z_0, z_1 body oblasti $G \subset E_2$, existuje $h \in V(0, 1)$ tak, že $h(0) = z_0$, $h(1) = z_1$, $h(\langle 0, 1 \rangle) \subset G$.

Je-li $h \in V_0(a, b)$, můžeme na množině $E_2 - h(\langle a, b \rangle)$ definovat funkci ind_h předpisem

$$\operatorname{ind}_h z = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dh(t)}{h(t) - z}.$$

Potom nabývá funkce ind_h jen celočíselných hodnot a je konstantní na každé komponentě množiny $E_2 - h(\langle a, b \rangle)$; je-li $|z|$ dostatečně velké, platí $\operatorname{ind}_h z = 0$. (Viz [1], odst. 4.)

2. Buď $h \in V_0(a, b)$. Pro $j = 1, 2$ buď $z_j = x + iy_j$, kde $x, y_j \in E_1$, $y_1 < y_2$ (resp. $z_j = x_j + iy$, kde $x_j, y \in E_1$, $x_1 < x_2$); buď J úsečka o koncových bodech z_1, z_2 . Necht body z_1, z_2 nepatří do $h(\langle a, b \rangle)$ a necht existuje právě jedno $t \in \langle a, b \rangle$, pro něž $h(t) \in J$; dále předpokládejme, že $t \in (a, b)$ a že funkce h_1 (resp. h_2) je ryze monotonní v bodě t . Potom platí

$$|\operatorname{ind}_h z_1 - \operatorname{ind}_h z_2| = 1. \quad (2)$$

Důkaz. Viz [1], odst. 7, vzorce (19) a (26).

3. Necht funkce $f (= f_1 + if_2)$, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$, určuje Jordanovu křivku C . Buď M množina všech $t \in (a, b)$, v nichž má funkce f_1 lokální extrém (ostrý nebo neostrý). Buď G vnitřek nebo vnějšek křivky C . Necht $x, y_j \in E_1$, $y_1 < y_0 < y_2$, $z_j = x + iy_j$ ($j = 0, 1, 2$); necht $z_0 \in C$ a necht úsečka o koncových bodech z_1, z_2 je částí \bar{G} . Potom $x \in f_1(M) \cup \{f_1(a)\}$.

Důkaz. Necht $x \neq f_1(a)$. Rozeznávejme dva případy.

I. Existují η_1, η_2 tak, že $\eta_1 < \eta_2$ a že úsečka J o koncových bodech $x + i\eta_1$, $x + i\eta_2$ je částí C . Můžeme určit čísla a_1, b_1 ($a < a_1 < b_1 < b$) tak, že $x \notin f_1(\langle a, a_1 \rangle) \cup f_1(\langle b_1, b \rangle)$ a tedy $J \subset f(\langle a_1, b_1 \rangle)$. Protože na množině $\langle a_1, b_1 \rangle$ je zobrazení f homeomorfní, je $f^{-1}(J)$ opět úsečka. Pro $t \in f^{-1}(J)$ je však $f_1(t) = x$; odtud plyne $x \in f_1(M)$.

II. Taková čísla η_1, η_2 neexistují. Potom můžeme předpokládat, že $z_1, z_2 \notin C$ a tedy $z_1, z_2 \in G$. Protože G je oblast, existuje $g \in V(0, 1)$ tak, že $g(0) = z_1$, $g(1) = z_2$, $g(\langle 0, 1 \rangle) \subset G$. Buď U otevřený kruh o středu z_0 a poloměru ε

takový, že $U \cap g(\langle 0, 1 \rangle) = \emptyset$; buď U_+ (resp. U_-) množina těch bodů $z \in U$, jejichž první souřadnice je větší (resp. menší) než x . Položme $h(t) = g(t)$ pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $h(t) = z_2 + (t - 1)(z_1 - z_2)$ pro $t \in \langle 1, 2 \rangle$. Potom je $h \in V_0(0, 2)$. Protože $\tilde{G} = E_2 - \bar{G}$ je oblast disjunktní s $h(\langle 0, 2 \rangle) \subset \bar{G}$, je funkce ind_h konstantní na \tilde{G} ; z podobného důvodu je funkce ind_h konstantní také na každé z množin U_+, U_- . Položíme-li na př. $z_+ = z_0 + \frac{1}{2}\varepsilon$, $z_- = z_0 - \frac{1}{2}\varepsilon$, plyne snadno z (2) (kde ovšem píšeme z_-, z_+ místo z_1, z_2), že funkce ind_h má na U_+ jinou hodnotu než na U_- . Nemůže tedy platit zároveň $\tilde{G} \cap U_+ \neq \emptyset$ i $\tilde{G} \cap U_- \neq \emptyset$. Je-li na př. $\tilde{G} \cap U_+ = \emptyset$, zjistí se snadno, že v bodě t_0 , kde $f(t_0) = z_0$, má funkce f_1 lokální maximum; je tedy opravdu $x \in f_1(M)$.

4. Je-li $A \subset E_2$, $t \in E_1$, buď

$$A_t^1 = E[x; x \in E_1, x + it \in A], \quad A_t^2 = E[y; y \in E_1, t + iy \in A].$$

Lebesgueovu míru v E_k budeme značit μ_k ($k = 1, 2$). Slova „skoro všude“, „měřitelná množina“ a pod. se vždy budou vztahovat k míře μ_k ; ze souvislosti bude patrné, které k je míněno.

Buď A omezená měřitelná neprázdná část E_2 . Buď \mathfrak{P}_A (resp. \mathfrak{B}_A) množina všech reálných (resp. komplexních) polynomů $\varrho(x_1, x_2)$, splňujících vztah $|\varrho(x_1, x_2)| \leq 1$ pro každý bod $[x_1, x_2] \in A$. Pro $k = 1, 2$ položme

$$\|A\|_k = \sup \int_A \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} d\mu_2, \quad \text{kde } \varrho \in \mathfrak{P}_A;$$

dále buď

$$\|A\| = \sup \int_A \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2} \right) d\mu_2, \quad \text{kde } \varrho = \varrho_1 + i\varrho_2 \in \mathfrak{B}_A.$$

Snadno se zjistí (viz [2], odst. 4, str. 523), že

$$\max(\|A\|_1, \|A\|_2) \leq \|A\| \leq \|A\|_1 + \|A\|_2. \quad (3)$$

5. Necht funkce $f (= f_1 + if_2)$ definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$ určuje Jordanovu křivku C ; buď G vnitřek C a buď A taková měřitelná množina, že $G \subset A \subset \bar{G}$. Položme $v_j = \text{var}(f_j)$ ($j = 1, 2$). Potom platí

$$v_1 = \|A\|_2, \quad v_2 = \|A\|_1. \quad (4)$$

Důkaz. Pro $x \in E_1$ buď $q(x)$ počet prvků množiny $f_1^{-1}(x)$ (je-li tato množina nekonečná, položíme $q(x) = \infty$). Podle Banachovy věty (viz [3], str. 280) je funkce q měřitelná a platí

$$\int_{E_1} q d\mu_1 = v_1. \quad (5)$$

Buď napřed $\|A\|_2 < \infty$. Podle [2], odst. 33 (str. 545) existuje množina $K \subset E_1$, která má tyto vlastnosti:

1) Je $\mu_1(E_1 - K) = 0$.

2) Ke každému $x \in K$ existují čísla $\alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_r < \beta_r$ (r celé ≥ 0) tak, že množina A_x^2 je ekvivalentní*) se sjednocením $\bigcup_{j=1}^r (\alpha_j, \beta_j)$; položíme-li $r = \varphi(x)$, je

$$2 \int_{E_1} \psi \, d\mu_1 = \|A\|_2. \quad (6)$$

Dále buď M množina těch bodů $t \in (a, b)$, v nichž má funkce f_1 lokální extrém; buď

$$T = \{f_1(a)\} \cup f_1(M) \cup (E_1 - K).$$

Snadno se zjistí, že množina $f_1(M)$ je spočetná; je tedy $\mu_1(T) = 0$. Zvolme $x \in E_1 - T$ a sestrojme podle 2) čísla α_j, β_j . Protože $A \subset \bar{G}$, je $\bigcup_{j=1}^r (\alpha_j, \beta_j) \subset (\bar{G})_x^2$; protože však $x \notin f_1(M) \cup \{f_1(a)\}$, je (podle odst. 3) $\bigcup_{j=1}^r (\alpha_j, \beta_j) \subset G_x^2$. Položíme-li ještě $\beta_0 = -\infty, \alpha_{r+1} = \infty$, zjistíme podobně, že $\bigcup_{j=0}^r (\beta_j, \alpha_{j+1}) \subset (E_2 - \bar{G})_x^2$. Je tedy $C_x^2 = \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_r, \beta_r\}$; vidíme, že $q(x) = 2r = 2\varphi(x)$. Odtud a z (5), (6) plyne $v_1 = \|A\|_2$.

Buď nyní $v_1 < \infty$. Pro každé x je hranice množiny A_x^2 částí množiny C_x^2 , která má $q(x)$ prvků; množina A_x^2 má tedy nejvýš $q(x)$ komponent. Podle (5) je $\int_{E_1} q \, d\mu_1 < \infty$; podle [2], odst. 20 (str. 535–536) je tedy $\|A\|_2 \leq 2 \int_{E_1} q \, d\mu_1 < \infty$. Je-li tudíž $\|A\|_2 = \infty$, je též $v_1 = \infty$. Tím je dokázáno, že v každém případě platí $v_1 = \|A\|_2$; důkaz vztahu $v_2 = \|A\|_1$ je podobný.

Poznámka 1. Ze vztahů (1), (3), (4) plyne, že platí $\text{var}(f) < \infty$, právě když $\|A\| < \infty$.

Poznámka 2. Buď $\text{var}(f) < \infty$ (a tedy $\|A\| < \infty$). Zvolme $x \in f_1(\langle a, b \rangle) - T$ (snadno se zjistí, že takové x existuje a že $\varphi(x) \geq 1$) a určíme čísla y_1, y_2 tak, abychom měli $y_1 < \alpha_1 < y_2 < \beta_1$. Protože $\text{ind}_f z = 0$ pro všechna $z = x + iy$, kde $y < \alpha_1$, plyne snadno z (2), že $|\text{ind}_f(x + iy_2)| = 1$. Je-li tedy z hodnota funkce $\text{ind}_f z$ na vnitřku G křivky C , je $z = \pm 1$.

6. Jsou-li g, h komplexní funkce (na téže množině), pak symbolem $[g, h]$ (skalární součin) budeme rozumět (reálnou) funkci $g_1 h_1 + g_2 h_2$. Dále píšeme

$$\text{div } v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \text{ pro každý komplexní polynom } v(x_1, x_2).$$

7. Buď G vnitřek Jordanovy křivky, určené funkcí f v intervalu $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme, že funkce f_1, f_2 jsou absolutně spojité. Buď \varkappa hodnota funkce ind_f na G ; buď π komplexní funkce, splňující rovnost

$$ix \pi(t) = f'(t)$$

*) Řekneme, že množiny P, Q jsou ekvivalentní, jestliže $\mu_1(P - Q) = \mu_1(Q - P) = 0$.

pro skoro všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\int_a^b [v(f), \pi] d\mu_1 = \int_G \operatorname{div} v d\mu_2 \quad (7)$$

pro každý komplexní polynom v .

Důkaz. Podle Greenovy věty (viz [1], odst. 10) dostáváme $\kappa \int_G \operatorname{div} v d\mu_2 =$
 $= \int_a^b v_1(f) df_2 - \int_a^b v_2(f) df_1 = \int_a^b (v_1(f) f_2' - v_2(f) f_1') d\mu_1 = \kappa \int_a^b [v(f), \pi] d\mu_1.$

8. Buď G vnitřek Jordanovy křivky C , která má délku d ($0 < d \leq \infty$). Buď A měřitelná množina taková, že $G \subset A \subset \bar{G}$. Potom platí $\|A\| = d$.

Důkaz. Podle poznámky 1 v odst. 5 stačí vyšetřit případ, kdy $d < \infty$ (a tedy též $\|A\| < \infty$). Můžeme proto předpokládat, že funkce f , která určuje křivku C , „má za parametr oblouk“, t. j., že $f \in V_0(0, d)$ a že $\operatorname{var}(f, 0, t) = t$ pro každé $t \in (0, d)$. Potom jsou funkce f_1, f_2 absolutně spojité a platí $|f'(t)| = 1$ pro skoro všechna $t \in \langle 0, d \rangle$. (Viz [3], str. 123, Theorem (8.4).) Označme hodnotu funkce ind_r na množině G písmenem κ a definujme v intervalu $\langle 0, d \rangle$ komplexní borelovskou funkci π tímto předpisem: Jestliže $f'(t)$ existuje ($0 < t < d$) a má prostou hodnotu 1, buď $\pi(t) = -i\kappa f'(t)$; pro ostatní t položme (na př.) $\pi(t) = 1$. Dále definujme na množině C funkci v vztahem

$$v(z) = \pi(t), \quad \text{kde } z = f(t).$$

Protože pro každé $n > \frac{1}{d}$ je zobrazení f intervalu $\langle 0, d - \frac{1}{n} \rangle$ homeomorfní, je v borelovská funkce. Položme konečně

$$p(B) = \mu_1(f^{-1}(B))$$

pro každou borelovskou množinu $B \subset C$. Snadno se zjistí, že p je míra a že pro každou omezenou borelovskou funkci ω na C platí $\int_C \omega dp = \int_0^d \omega(f) d\mu_1$; pro každý komplexní polynom v je tedy (viz (7))

$$\int_C [v, v] dp = \int_0^d [v(f), \pi] d\mu_1 = \int_G \operatorname{div} v d\mu_2 = \int_A \operatorname{div} v d\mu_2.$$

Odtud plyne podle [2], odst. 18 (str. 534), že $p(C) = \|A\|$; je tedy opravdu $\|A\| = d$.

LITERATURA

- [1] J. Král a J. Mařík: Der Greensche Satz, Чех. мат. журнал, 7 (82), 1957, 235—247.
- [2] J. Mařík: The surface integral, Чех. мат. журнал, 6 (81), 1956, 522—558.
- [3] S. Saks: Theory of the integral, New York.

Резюме

ЗАМЕТКА О ДЛИНЕ ЖОРДАНОВОЙ КРИВОЙ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага

(Поступило в редакцию 17/IV 1957 г.)

В работе [2] для всякого измеримого ограниченного множества $A \subset E_m$ определено число $\|A\|$, которое играет важную роль в теории поверхностного интеграла. В настоящей работе доказана следующая теорема:

Пусть G — область, лежащая внутри (плоской) жордановой кривой длины α ($0 < \alpha \leq \infty$); пусть A — измеримое множество, $G \subset A \subset \bar{G}$. Тогда $\|A\| = \alpha$.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE LÄNGE EINER JORDANSCHEN KURVE

JAN MAŘÍK, Praha

(Eingelangt 17. IV. 1957)

In der Arbeit [2] wird jeder beschränkten messbaren Menge $A \subset E_m$ eine Zahl $\|A\|$ zugeordnet, welche in der Theorie des Oberflächenintegrals eine wichtige Rolle spielt. In diesem Artikel wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei G das Innere einer (ebenen) Jordanschen Kurve von der Länge d ($0 < d \leq \infty$). Wenn eine messbare Menge A die Bedingungen $G \subset A \subset \bar{G}$ erfüllt, dann gilt $\|A\| = d$.