Časopis pro pěstování matematiky

Václav Havel

Poznámka o existenci konečných grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 80 (1955), No. 4, 477--480

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108220`

POZNÁMKA O EXISTENCI KONEČNÝCH GRAFŮ

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Došlo dne 23. prosince 1954.) DT 519.5

V této poznámce je udán algoritmus, podle něhož lze rozhodnout, zdali daná přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lze pokládat za stupně jednotlivých uzlů nějakého konečného grafu.

Grafem budeme rozumět konečnou množinu se symetrickou a nereflexivní binární relací mezi jejími prvky. Ke každému prvku přiřadíme počet všech těch prvků, které s ním stojí v grafové relaci. Z těchto přiřazených čísel sestavíme nerostoucí posloupnost a nazveme ji *strukturou*. Pořadí členů struktury určuje pořadí odpovídajících prvků grafu. Položme $(i, j) = 1$ (resp. $(i, j) = 0$), když i-tý prvek je (resp. není) v relaci s j-tým prvkem.

Dále nazveme *r-posloupností* konečnou nestoupající posloupnost, jejímiž členy jsou přirozená čísla, při čemž je první člen menší než počet všech členů a počet lichých členů je sudý; strukturu, která je r-posloupností, nazveme *r-strukturou.*

Věta 1. *Buď* $\|(i, j)\|$ *symetrická n-řadová matice, jejíž prvky jsou rovny některému z čísel* 1, 0 *tak, že hlavní diagonála je nulová a tak, že posloupnost* $\{(i, 1) + (i, 2) + \ldots + (i, n)\}_{i=1}^n$ *je nerostoucí. Tato matice určuje n-prvkový graf podle ekvivalence* $(i, j) = 1 \Leftrightarrow$ *i-tý prvek je v grafové relaci s j-tým prvkem.*

Důkaz je zřejmý. Podmínka $(i, j) = (j, i)$ charakterisuje symetrii, podmínka $(i, i) = 0$ nereflexivnost grafové relace.

Věta 2. *Každý člen struktury je menší než počet všech členů. Žádný člen struktury není větší než součet ostatních členů. Lichých členů je ve struktuře sudý počet.*

Důkaz prvních dvou tvrzení je zřejmý. Dokážeme tedy ještě třetí tvrzení. Z podmínek $(i, j) = (j, i)$, $(i, i) = 0$ vyplývá, že součet všech členů struktury je sudé číslo. Zbytek důkazu je již snadný.

Z prvního tvrzení vyplývá, že struktura není prostou posloupností.

Věta 3. *Mezi grafy o r-struktuře* $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *existuje takový, pro nějž platí* $(1, n) = (2, n) = \ldots = (a_n, n) = 1$.

Důkaz. Vyberme libovolný graf struktury a. Existuje index k $(0 \leqq k < n)$ tak, že pro vybraný graf platí $(1, n) = (2, n) = \ldots = (k, n) = 1$, $(k + 1, n) \neq 0$

(v případě $k = 0$ odpadá ovšem první systém rovnic). Je-li $k = a_n$, pak dokazované tvrzení platí. Je-li $k < a_n$, pak ve vybraném grafu (označme jej A_k) existuje index $v_k > k + 1$ tak, že platí $(v_k, n) = 1$. Dokážeme dále, že (vzhledem k A_k) existuje index w_k ($1 \leqq w_k < n$), pro nějž platí $(k + 1, w_k) = 1$, $(v_k, w_k) = 0$.

V opačném případě by byla splněna rovnice $(v_k, w_k) = 1$ pro každý index w_k, pro nějž jest $1 \leqq w_k < n$, $(k + 1, w_k) = 1$. Potom by ale platilo $a_k < a_{v_k}$, a to ve sporu s předpokladem, že a je struktura. Tedy zmíněný index w_k existuje.

Nyní položme $(k + 1, n) = (n, k + 1) = 1$, $(k + 1, w_k) = (w_k, k + 1) = 0$, $(v_k, w_k) = (w_k, v_k) = 1$, $(v_k, n) = (n, v_k) = 0$; hodnoty ostatních (i, j) nechme beze změny. Takto definovaná čísla (i, j) určují podle věty 1 jistý graf A_{k+1} struktury a. Je-li $k + 1 = a_n$, pak dokazované tvrzení platí; je-li $k + 1 < a_n$, pak v předchozí úvaze nahradíme všude k indexem $k + 1$ a sestrojíme jistý graf A_{k+2} struktury a. A tak pokračujeme dále. Po konečném počtu kroků dojdeme k jistému grafu struktury a, pro nějž již dokazované tvrzení platí.

Věta 4. *Nechť $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ je r-posloupnost, pro niž platí $g_1 > 1$. Pak posloupnost $g_1 - 1, g_2 - 1, \ldots, g_{g_m} - 1, g_{g_m+1}, g_{g_m+2}, \ldots, g_{m-1}$ dá se přerovnat v r-strukturu (označme ji g'), právě když g je struktura. Je-li g' struktura, pak ke každému grafu struktury g' existuje nadgraf struktury g.*

Důkaz. Posloupnost g' neobsahuje žádný nulový člen. Kdyby totiž jistý člen $g_i - 1$ ($i = 1, 2, \ldots, g_m$) byl nulový, pak by bylo $g_i = 1$, a tedy též $g_m = 1 = i$; posloupnost g by pak obsahovala samé jednotky, a to odporuje předpokladu.

Nechť g je struktura; podle věty 3 existuje graf struktury g, jehož prvních g_m prvků je v grafové relaci s prvkem posledním. Odstraníme-li tento poslední prvek i s relacemi mezi ním a prvky předcházejícími a ponecháme-li ostatní prvky a relace beze změny, dostaneme jistý graf struktury g'.

Nechť g' je struktura a G' je libovolný graf struktury g'. Přidáme ke G' nový prvek a rozšíříme relaci v G' v symetrickou nereflexivní relaci tak, že nový prvek bude v rozšířené relaci s těmi prvky z G', které odpovídají členům $g_1 - 1, g_2 - 1, \ldots, g_{g_m} - 1$ struktury g'. Tímto rozšířením dostaneme jistý nadgraf (struktury g) grafu G'.

Věta. *Nechť $a^{(0)}$ je r-posloupnost s prvním členem větším než 1. Existuje algoritmus, podle něhož lze rozhodnout, zda $a^{(0)}$ je anebo není struktura.*

Důkaz. Nechť $a^{(0)}$ je struktura. Pak podle věty 4 je též $a' = a^{(1)}$ struktura, a tedy též (opět podle věty 4) $a^{(1)'} = a^{(2)}$ je struktura; takto pokračujíce, sestrojujeme struktury $a^{(2)'} = a^{(3)}$, $a^{(3)'} = a^{(4)}$ atd. Jsou možné dva případy. Buďto existuje index q_1 ($1 \leqq q_1 < n$) tak, že poslední prvek z $a^{(q_1)}$ není menší než $n - q_1$, anebo takové q_1 neexistuje a pak existuje index q_2 ($1 \leqq q_2 < n$) tak, že posloupnost $a^{(q_1)}$ obsahuje samé jednotky.

V prvním případě dostáváme spor s předpokladem, že $a^{(0)}$ je struktura (neboť podle prvního tvrzení věty 2 není $a^{(q_1)}$ strukturou); tedy ani $a^{(0)}$ není struktura a výsledek je v tomto případě negativní.

Vyšetříme ještě druhý případ. Poněvadž $a^{(0)}$ je r-posloupnost, je číslo $n - q_2$ sudé; snadno nahlédneme, že existuje jistý graf $A^{(q_2)}$ struktury $a^{(q_2)}$. Poněvadž $a^{(q_2)}$ je struktura, je podle poučky 4 též $a^{(q_2-1)}$ struktura a ke grafu $A^{(q_2)}$ sestrojíme rovněž podle poučky 4 jistý nadgraf $A^{(q_2-1)}$ struktury $a^{(q_2-1)}$. Poněvadž $a^{(q_2-1)}$ je struktura, je podle poučky 4 též $a^{(q_2-2)}$ struktura a ke grafu $A^{(q_2-1)}$ sestrojíme opět jistý nadgraf $A^{(q_2-2)}$ struktury $a^{(q_2-2)}$. Takto postupujeme dále, odvozujíce, že $a^{(q_2-i)}$ jsou struktury, a sestrojujíce jisté grafy $A^{(q_2-i)}$ struktur $a^{(q_2-i)}$, při čemž $A^{(q_2-i)}$ je nadgraf grafu $A^{(q_2-i-1)}$ $(i = 1, 2, \dots, q_2)$. Pro $i = q_2$ dostaneme hledaný výsledek, že totiž posloupnost $a^{(0)}$ je struktura; $A^{(0)}$ je pak jistý graf struktury $a^{(0)}$.

Věta 5. *Každá r-posloupnost se všemi členy stejnými je struktura.*

Důkaz. Danou posloupnost označme $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; podle předpokladu jest $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Je-li a_1 sudé, pak položme $(i, j) = 1$, když*) $j \equiv i \pm \frac{a_1}{2} \pm t$ $(t = 0, 1, \dots, \frac{a_1}{2} - 1)$; v ostatních případech položme $(i, j) = 0$. Takto definovaná (i, j) určují podle poučky 1 jistý graf struktury a. Je-li a_1 liché a n sudé, pak položme $(i, j) = 1$, když $j \equiv i \pm \frac{a_1 - 1}{2} \pm t$ $(t = 0, 1, \dots, \frac{a_1 - 1}{2} - 1)$, $j \equiv i + \frac{n}{2}$; v ostatních případech položme opět $(i, j) = 0$. Takto definovaná čísla (i, j) určují podle poučky 1 jistý graf struktury a.

Резюме

ЗАМЕТКА О СУЩЕСТВОВАНИИ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 23/XII 1954 г.)

Назовем *структурой* невозрастающую конечную последовательность узлов отдельных точек конечного графа. Далее, назовем *r-последовательностью* конечную невозрастающую последовательность натуральных чисел, причем первый член меньше числа всех членов, а число нечетных членов является четным числом; структуру, представляющую собой r-последовательность, назовем r-структурой.

Среди графов с данной r-структурой $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ существует такой граф, в котором последний узел соединен ребром с первыми a_n узлами (теорема 3).

*) Znakem $\equiv$ rozumíme kongruenci modulo n.

Предположим далее, что $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ есть r-последовательность, первый член которой больше 1. Тогда последовательность $g_1 - 1, g_2 - 1, \ldots, \ldots, g_{g_m} - 1, g_{g_m+1}, g_{g_m+2}, \ldots, g_{m-1}$ можно перевести путем перераспределения в r-структуру (обозначим ее через g') в том и только в том случае, когда g есть структура. Если g' — структура, то для каждого графа структуры g' существует надграф структуры g (теорема 4).

Если a есть r-последовательность с первым членом, большим единицы, то существует алгорифм, позволяющий установить, является ли a структурой или нет. (Главный результат работы.)

Алгорифм состоит в постепенном построении r-последовательности ${}^1a = a'$, ${}^2a = {}^1a'$, ${}^3a = {}^2a'$ (по обозначениям из теоремы 4); при доказательстве главную роль играет теорема 4.

Zusammenfassung

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE EXISTENZ DER ENDLICHEN GRAPHEN

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Eingelangt 23. XII. 1954.)

Wir bezeichnen die nicht wachsende endliche Folge der Grade der Knoten eines endlichen Graphen als *Struktur* dieses Graphen. Weiter bezeichnen wir als *r-Folge* eine endliche nicht wachsende Folge der natürlichen Zahlen mit dieser Eigenschaft: Das erste Element ist kleiner als die Zahl aller Elemente und die Zahl der ungeraden Elemente ist gerade. Die Struktur, die eine r-Folge ist, bezeichneten wir als *r-Struktur*.

Unter den Graphen mit gegebener r-Struktur $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ existiert ein solcher Graph, in welchem der letzte Knoten mit den ersten a_n Knoten verbuden ist. (Lehrsatz 3.)

Setzen wir voraus, dass $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ eine r-Folge ist, in welcher das erste Element grösser als 1 ist. Die Folge $g_1 - 1, g_2 - 1, \ldots, g_{g_m} - 1, g_{g_m+1}, \ldots, g_{m-1}$ lässt sich in eine Struktur umformen (wir bezeichnen sie g') dann und nur dann, wenn g eine Struktur ist. Wenn g' eine Struktur ist, dann existiert zu jedem Graphen der Struktur g' ein Obergraph der Struktur g. (Lehrsatz 4.)

Es sei a eine r-Folge mit dem ersten Element, das grösser als 1 *ist; dann existiert ein Algorithmus, nach dem sich entscheiden lässt, ob a eine Struktur ist.* (Das wichtigste Resultat der Untersuchung.)

Dieser Algorithmus besteht aus einer sukzessiven Konstruktion der r-Folgen ${}^1a = a'$, ${}^2a = {}^1a'$, ${}^3a = {}^2a'$, ... (nach Bezeichnung aus dem Lehrsatz 4); der Beweis beruht hauptsächlich auf dem Lehrsatz 4.