RECENSE

Adam Zawadski: **Trójobrazowy rzut równoległy,** Warszawa 1957, Państwowe wydawnictwo naukowe; náklad 2000 exemplářů, 148 str., 142 obr.; cena 19,50 zl. (14,40 Kčs).

Spis je původní autorovou prací a je věnován trojobrazovému rovnoběžnému promítání. Vysvětlíme podstatu tohoto promítání: *Soustavou* **S** rozumí se trojice nekomplanárních přímek x, y, z jdoucích vlastním bodem O; roviny xy, xz, yz označeny π_1, π_2, π_3. *Promítacími aparáty**) $[\pi_1, z]$, $[\pi_2, y]$, $[\pi_3, x]$ daná zobrazení nechť jsou realisována v rovině π_1 tak, že π_2 a π_3 jsou sklopeny okolo x a y do π_1. Sklopení úhlů xz, yz je provedeno tak, aby sklopené polohy xz'', yz''' byly disjunktní s úhlem xy.**) Trojici prodloužených úhlů xy, xz'', yz''' nazývá pak autor *rozvinutým systémem*. Každému vlastnímu bodu B jsou pak přiřazeny: průmět $B' = B_1$ v $[\pi_1, z]$, sklopená poloha B'' průmětu B_2 v $[\pi_2, y]$ a konečně sklopená poloha B''' průmětu B_3 v $[\pi_3, x]$.

Jsou řešeny úlohy polohové i metrické, a to i s transformací průměten. V projednávaném druhu promítání mají důležitý význam úlohy o trojhranu xyz, v nichž vystupují hodnoty

$$\vartheta_1 = \sphericalangle\, xy,\ \ \vartheta_2 = \sphericalangle\, xz,\ \ \vartheta_3 = \sphericalangle\, yz,\ \ \varphi_{23} = \sphericalangle\, \pi_2\pi_3,\ \ \varphi_{13} = \sphericalangle\, \pi_1\pi_3,\ \ \varphi_{12} = \sphericalangle\, \pi_1\pi_2,$$
$$\vartheta_z = \sphericalangle\, z\pi_1,\ \ \vartheta_y = \sphericalangle\, y\pi_2,\ \ \vartheta_x = \sphericalangle\, x\pi_3\,.$$

Závěrem jsou provedeny aplikace na výklad základních formulí sférické trigonometrie a je vyložen přechod od rozvinuté soustavy ke *sdružené rovnoběžné axonometrii*. Tento přechod blíže popíšeme:

Přímky x, y, z'' prohlásí se za axonometrické průměty soustavy $\mathbf{S}^+$ shodné s **S**, body B', B'' prohlásí se za axonometrické průměty bodů B_1, B_2. Tato axonometrie je — podle autorova názvu — *dvojvěrná*, čímž se rozumí, že axonometrický průmět roviny π_1 i roviny π_2 je shodný s originálem. Jak lze ukázat, poloha soustavy $\mathbf{S}^+$ (a tím i směr axonometrického promítání) je až na posunutí a symetrii podle axonometrické průmětny určena dvojznačně jakožto analogie vojenské perspektivy.

Způsob výkladu je přesný a didakticky velmi vhodný. Obrazce jsou pečlivě narýsovány. Recensent upozorňuje, že černými ploškami na obr. 65, 94 a 95 jsou označeny průměty pravých úhlů; na str. 10 v řádku 19 shora selhala totiž tisková reprodukce této značky.

Zawadského knížka obohacuje polskou literaturu z deskriptivní geometrie, zastoupenou v poslední době učebnicí E. Otty: *Geometria wykreślna*, Warszawa 1954 a u nás nedostupnou knihou S. Szerszeňa: *Nauka o rzutach*, Warszawa 1956.***)

Václav Havel, Brno

*) Promítací aparát skládá se z průmětny a směru promítání.

**) Jde o otevřené úhly.

***) Během korektury došla do ČSR učebnice: Jerzy Waligórski, Geometria wykreślna dla inżynierów i techników, Warszawa 1958, v níž je proveden odkaz na učebnici (recensentovi neznámou): T. Rachwał, Geometria wykreślna; t. 1, Łódź-Kraków 1955; t. 2, Łódź-Kraków 1956.

Wacław Sierpiński: **O rozkładoch liczb wymiernych na ułamki proste.** Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1957, 110 stran, 9 obrázků, cena zl. 7,—.

Každý čtenář, který se zajímá o elementární teorii číselnou, sáhne zajisté rád po nové monografii W. Sierpińského pojednávající o rozkladech racionálních čísel na kmenné zlomky. Spisek je sice malý rozsahem, avšak bohatý obsahem, při čemž předběžné vzdělání, které autor u čtenáře předpokládá, je celkem minimální, takže brožurku mohou snadno číst posluchači prvních semestrů na vysokých školách. Nepoužívá se zde např. ani kongruencí, třebaže by zavedení pojmu kongruence zkrátilo mnohé formulace.

Knížka je rozvržena do čtyř oddílů, jejichž náplně si zde chceme všimnout podrobněji.

První část monografie má název „Součty kmenných zlomků". *Kmenným zlomkem* nazýváme číslo tvaru $\frac{1}{n}$, kde n je přirozené číslo. Je-li s dané přirozené číslo, pak každé číslo, jež lze vyjádřit jako součet s kmenných zlomků, nazývá Sierpiński číslem A_s. Je vidět, že čísly A_1 jsou právě kmenné zlomky; dále též snadno nahlédneme, že každé číslo A_s je rovněž číslem A_{s+k} pro $k = 1, 2, 3, \ldots$. Přirozeně vznikne nyní nejprve otázka po studiu čísel A_2. Nutnou a postačující podmínku k tomu, aby dané číslo $\frac{m}{n}$ (kde m, n jsou přirozená čísla) bylo A_2, nalezl polský matematik A. Schinzel. Tato podmínka žádá, aby existovali dva dělitelé čísla n, jejichž součet je dělitelný číslem m. Také japonský matematik M. Nakayama našel r. 1939 jedno kriterium pro čísla A_2, to je však mnohem komplikovanější než uvedená podmínka Schinzelova.

Zajímavé je také zkoumání speciálnějších případů čísel $\frac{m}{n}$ v souvislosti s otázkou, zda jde o čísla A_2. Sierpiński tak rozbírá čísla $\frac{m}{n}$ pro $m = 1, 2, 3, 4$ (případy $m = 1, 2$ jsou ovšem triviální, neboť pro tyto hodnoty je každý zlomek $\frac{m}{n}$ číslem A_2).

V závěru odstavce o číslech A_2 se čtenář bez důkazu seznámí s jednou větou M. Nakayamy, která — zhruba řečeno — říká:

K danému přirozenému číslu m existuje jen málo takových přirozených čísel n, pro něž zlomek $\frac{m}{n}$ není číslem A_2.

Všimněme si nyní čísel A_3. Pro $m = 1, 2, 3$ je ovšem každý zlomek $\frac{m}{n}$ číslem A_3. Maďarský matematik P. Erdös vyslovil před časem domněnku, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ je zlomek $\frac{4}{n}$ číslem A_3. Tato hypothesa nebyla dosud dokázána ani vyvrácena; byla pouze ověřena platnost uvedeného tvrzení pro přirozená čísla $n < 141\,649$. U Sierpińského najdeme celkem jednoduchý důkaz Erdösovy domněnky pro $n \leqq 1000$. Analogické věty o zlomku $\frac{m}{n}$, které autor uvádí ještě pro $m = 5, 6, 7$, vedly A. Schinzela k tomuto tvrzení, jež dosud nebylo dokázáno ani vyvráceno: *Ke každému přirozenému číslu m existuje jen konečně mnoho přirozených čísel n takových, že zlomek $\frac{m}{n}$ není A_3.*[1])

Rozklad racionálního čísla v součet několika kmenných zlomků má zajímavou aplikaci v úloze o pokrytí roviny pravidelnými mnohoúhelníky, z nichž žádné dva se nepřekrývají. Žádáme-li např., aby každý vrchol každého z uvedených mnohoúhelníků byl společný pro tři mnohoúhelníky „sousední" (a označíme-li po řadě x, y, z počet stran každého z mnohoúhelníků, jež se stýkají v pevně zvoleném bodě roviny), dostaneme

[1]) P. Erdös soudí, že toto tvrzení není správné.

z úvahy o vnitřních úhlech mnohoúhelníků po snadné úpravě rovnici

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

Ta má (připojíme-li ještě požadavek $x \leqq y \leqq z$) celkem 10 řešení trojicemi přirozených čísel, z nichž však jen trojicím (3, 12, 12), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (6, 6, 6) odpovídá žádané pokrytí. V Sierpińského spisku najdeme systematické zkoumání ještě dalších komplikovanějších rozkladů roviny na pravidelné mnohoúhelníky, jež zajímavě ilustrují ústřední číselně teoretickou tematiku.[2])

Druhá část knížky je nadepsána „Součty různých kmenných zlomků". Rozklad racionálního čísla v součet navzájem různých kmenných zlomků zajímal už staré Egypťany, u nichž nacházíme tyto vzorce:[3])

$$1 = \bar{2} + \bar{3} + \bar{6}, \quad \frac{2}{35} = \overline{30} + \overline{42},$$

$$\frac{2}{31} = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155}, \quad \frac{2}{43} = \overline{42} + \overline{86} + \overline{129} + \overline{301},$$

$$\frac{2}{89} = \overline{60} + \overline{356} + \overline{534} + \overline{890}, \quad \frac{2}{101} = \overline{101} + \overline{102} + \overline{303} + \overline{606}.$$

Je zajímavé, že každé kladné racionální číslo lze vyjádřit jako součet konečného počtu navzájem různých kmenných zlomků. V úloze o rozkladu čísla $\frac{m}{n}$ na součet tří navzájem různých kmenných zlomků jsou případy $m = 1, 2, 3$ celkem jednoduché. Nerozřešená zůstala však dosud otázka už pro $m = 4$. P. Erdös a Strauss se domnívají, že každé číslo $\frac{4}{n}$ (kde $n > 3$) je součtem tří různých kmenných zlomků; svou hypothesu ověřili pro všechna $n < 5000$.

Třetí část spisku je nazvána „Součty různých kmenných zlomků s lichými jmenovateli". Autora zde zajímají opět nejprve analogické otázky, jaké řešil u předcházejících problémů: Zkoumá, pro která přirozená čísla n lze čísla $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}$ vyjádřit jako součet dvou (resp. tří) navzájem různých kmenných zlomků s lichými jmenovateli.

E. P. Starke položil r. 1952 otázku, zda je možno každý kladný zlomek s lichým jmenovatelem napsat jako součet konečného počtu navzájem různých kmenných zlomků s lichými jmenovateli. Otázka byla kladně zodpovězena různými autory a Sierpiński zde uvádí jedno z těchto řešení.

Závěr třetí části spisku vybočuje poněkud z tematiky předcházejících paragrafů, neboť jedná o nekonečných řadách navzájem různých kmenných zlomků s lichými jmenovateli.

Poslední, čtvrtá část knížky, kterou Sierpiński nazval „Algebraické součty kmenných zlomků", uvádí zobecnění pojmu čísla A_s. Je-li s dané přirozené číslo, nazýváme

[2]) Chtěl bych upozornit, že otázkou pokrytí roviny pravidelnými mnohoúhelníky se už r. 1901 zabýval W. Ahrens v knize „Mathematische Unterhaltungen und Spiele." Tam jsou také uvedeny prameny z časopisů z konce minulého století, o nichž se Ahrens dověděl — jak sám uvádí — až po sepsání příslušné pasáže své knihy.

[3]) Zde klademe $\bar{n} = \frac{1}{n}$ podle O. Neugebauera: *Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter.*

číslem B_s každé z těch čísel, které lze vyjádřit ve tvaru

$$e_1 \frac{1}{x_1} + e_2 \frac{1}{x_2} + \ldots + e_s \cdot \frac{1}{x_s},$$

kde x_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ jsou přirozená čísla a kde $e_i = +1$ nebo -1. Úvahy o číslech B_2 a B_3 jsou zakončeny opět jednou hypothesou A. Schinzela, která praví: *Ke každému přirozenému číslu m existuje přirozené číslo k_m takové, že pro všechna přirozená čísla $n > k_m$ je zlomek $\frac{m}{n}$ číslem B_3.* U Sierpińského je tato domněnka ověřena pro $m \leqq 18$.[4]) Závěrečný paragraf knížky si všímá toho, jak jsou čísla B_s rozložena na ose číselné. Ukazuje se, že pro každé přirozené číslo s množina čísel B_s je řídká v E_1.

Ze stručného přehledu, který jsme uvedli, je vidět, že problematika rozkladu racionálního čísla na kmenné zlomky, která byla studována v posledních letech zvláště některými polskými matematiky, má v sobě ještě řadu otevřených otázek. Z toho důvodu se domnívám, že literární odkazy, jež na některých místech udávají časopisecké prameny, by měly být úplnější — s ohledem na čtenáře, který by se chtěl problematice věnovat do hloubky.

Sierpińského monografii je možno doporučit zvláště našim studentům vysokoškolským a středoškolským.

Jiří Sedláček, Praha

L. A. Ljusternik: **Variační principy v geometrii a ve fysice.** Z ruštiny přeložil inž. *Milan Ullrich*, vydalo Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1957, 124 stran, 102 obrázky, cena brož. Kčs 4,30.

V českém překladu vyšel nedávno 18. svazek sbírky Populární přednášky o matematice. Podobně jako u předcházejících čísel této serie jde zase o knižní zpracování přednášek, které autor v průběhu let konal pro moskevské středoškoláky. Tato Ljusternikova „populární přednáška" se liší od většiny brožur předcházejících jednak rozsahem (který je zhruba dvojnásobný), jednak také námětem, který je zde náročnější. Zpracování je ovšem skoro všude jen náznakové a většinou se vychází z fysikálního názoru.

Knížka je rozdělena na dvě části, při čemž první z nich je vlastně přetisk autorovy brožury, která vyšla v SSSR roku 1940 pod názvem „Geodetické čáry". Tato první část pojednává o nejkratších čarách na nejjednodušších plochách (mnohostěnech, válci, ploše kuželové a válcové), z názoru bere definici tečny a normály rovinné křivky a zkoumá jednoduché vlastnosti rovinných a prostorových křivek. Závěr první části pojednává o geodetických čarách na některých plochách, zejména rotačních.

Druhá část knížky je motivována převážně fysikálními úlohami. Geometrické pojmy jsou tu definovány na fysikálních modelech a tyto modely jsou též pomůckou k řešení některých geometrických úloh. Propedeuticky probírá autor isoperimetrickou úlohu a ukazuje důsledky Fermatova principu v geometrické optice. Řada nových pojmů, jež ovšem nemohou být přesně definovány[1]), bude pro naše středoškoláky a absolventy středních škol, jímž je publikace určena, pravděpodobně jistým úskalím, zvláště při četbě druhé části.

Jiří Sedláček, Praha

[4]) Na str. 92 je tisková chyba ve vzorci pro $n = 13k \pm 2$ (před posledním zlomkem má být $\mp$ místo $\pm$).

[1]) Poznámka na str. 51 přehání, když mluví o „přesné definici" oskulační roviny. Ve skutečnosti jde jen o názorný popis.

G. N. Berman: **Zbierka úloh z matematickej analýzy.** Přeložili *M. Kolibiar* a *B. Kolibiarová*. Vydalo Slovenské vydavatelstvo technickej literatúry Bratislava 1957 (II. vydání), stran 460, náklad 3200, cena váz. 36,50 Kčs.

Již ve druhém vydání vychází slovenský překlad známé Bermanovy sbírky příkladů z matematické analysy. Překlad je pořízen podle čtvrtého ruského vydání z r. 1953. Kniha zatím vyšla v r. 1956 rusky v šestém přepracovaném vydání. Tato okolnost však neubírá tomuto překladu na ceně, protože zmíněné ruské šesté vydání bylo přizpůsobeno především novému vydání Bermantovy učebnice analysy, které se u nás, pokud vím, běžně nepoužívá.

Kniha je určena především pro studující na vysokých školách technického směru. U nás se ruský originál již dlouho s úspěchem používá při cvičení z matematiky na technikách. Kniha se omezuje na základní partie matematické analysy. Obsahuje především základy diferenciálního počtu funkcí jedné a více proměnných v obvyklém rozsahu až po Taylorovu větu a extrémy funkcí více proměnných. Z integrálního počtu jsou zde příklady na výpočet jednoduchých, dvojných a trojných integrálů. Vedle toho jsou zde příklady na křivkové a plošné integrály. Kniha obsahuje ještě příklady na nekonečné řady a to jak na řady s konstantními členy, tak na řady mocninné a trigonometrické. Konečně obsahuje kniha kapitolu o obyčejných diferenciálních rovnicích a to především o rovnicích prvého a druhého řádu. Kniha je doplněna některými jednoduchými aplikacemi na geometrii a fysiku. Cenu knihy zvyšuje připojení řady tzv. numerických příkladů. Na konci knihy jsou připojeny výsledky všech úloh.

Překlad knihy je pořízen pečlivě. Odkazy na Bermantovu učebnici jsou doplněny odkazy na naši literaturu. Partie o nekonečně malých a nekonečně velkých veličinách je přeložena tak, že odpovídá terminologii u nás obvyklejší.

Pro potřebu našich technik je Bermanova sbírka velmi vhodná. Má však tu vadu, že neobsahuje příklady na všechnu látku probíranou u nás v základních přednáškách; neobsahuje analytickou geometrii a lineární algebru, abych jmenoval nedostatky nejdůležitější. Rusové mají pro tyto obory sbírky speciální. My však nikoliv. Přitom by bylo vhodné připojit tyto chybějící partie k přeložené Bermanově sbírce, ať už z přeložených částí jiných sovětských sbírek, anebo v příkladech původních tak, aby student techniky nalezl všechny příklady, které z matematiky potřebuje, v jediné knize. Myslím, že by to bylo také finančně výhodnější. V tomto směru je úplnější sbírka Minorského, která má být rovněž přeložena; ale tato kniha je místy příliš elementární.

Jak už bylo řečeno, navazuje Bermanova kniha na Bermantovu učebnici, což mělo za následek, že zde nebyly uvedeny nejdůležitější výsledky teorie, kterou kniha předpokládá. Pro překlad by bylo výhodné uvést na začátku každého odstavce základní používané definice a věty, jak je tomu např. ve sbírce Minorského nebo Demidoviče.

Překlad Bermanovy sbírky je nutno jenom přivítat, poněvadž se tím odstraňuje jeden z citelných nedostatků ve vyučování matematice na našich vysokých školách technického směru.

Čestmír Vitner, Praha