

Vlastimil Dlab

Systemy generátorů Abelových grup

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 363--365

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108286>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $u(-T_0) = y$, že řešení $v(t)$ rovnice

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad (3)$$

$v\left(-\frac{1}{2}\right) = u(0)$, je definováno na intervalu $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ (toto řešení je jednoznačně určeno podle Osgoodovy věty) a že řešení $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0 \rangle$, rovnice (2) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $w(0) = v\left(\frac{1}{2}\right)$.

Potom pro dosti velká k existuje řešení $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, rovnice (1), $x_k(-T_0) = y_k$ a platí $x_k(t) \rightarrow u(t)$ resp. $w(t)$ pro $k \rightarrow \infty$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$ resp. $(0, T_0)$. Posloupnost $x_k(t)$ konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod 0.

Věta 2. Necht posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci pozitivně. Necht $y_k \rightarrow y \in D$, $0 < T_0 < T_1$. Předpokládejme, že řešení $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$, rovnice (2) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $u(-T_0) = y$, že řešení $v(t)$, $t \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, rovnice (3) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$ a že řešení $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0 \rangle$, rovnice (2) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $w(0) = u\left(\frac{1}{2}\right)$.

Potom pro dosti velká k existuje řešení $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, rovnice (1), $x_k(-T_0) = y_k$ a platí: $x_k(t) \rightarrow u(t)$ resp. $w(t)$ pro $k \rightarrow \infty$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$ resp. $t \in (0, T_0)$. Posloupnost $x_k(t)$ konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod 0.

Jaroslav Kurzweil, Praha

SYSTÉMY GENERÁTORŮ ABELOVÝCH GRUP

(Referát o přednášce VLASTIMILA DLABA přednesené v Matematické obci pražské dne 17. února 1958.)

V úvodu připomněl přednášející některé definice a základní výsledky teorie grup;¹⁾ používal při tom terminologie, kterou navrhuje akademik V. KOŘÍNEK: Grupu, jejíž každý nenulový prvek má konečný (resp. nekonečný) řád, nazveme *periodickou* (resp. *aperiodickou*). Podgrupu všech prvků konečného řádu dané grupy nazveme *periodickou částí* této grupy. Řekneme, že grupa G je *divisibilní*, jestliže každá rovnice $n \cdot x = g$, kde n je celé nenulové číslo, $g \in G$, má v G aspoň jedno řešení; G je tedy *divisibilní* právě tehdy, když pro každé nenulové celé n platí $nG = G$.

Budiž \mathfrak{M} neprázdná množina prvků grupy G ; symbolem $\{\mathfrak{M}\}$ označme nejmenší podgrupu grupy G , obsahující všechny prvky množiny \mathfrak{M} . Řekneme, že \mathfrak{G} je *systém generátorů* grupy G jestliže $\{\mathfrak{G}\} = G$, tj. jestliže každý prvek grupy G je možno vyjádřit jako lineární kombinaci prvků z \mathfrak{G} .

Vlastním obsahem přednášky bylo pak vyšetřování systémů generátorů. Přednášející ukázal nejprve na příkladech těžkosti, s nimiž se při tomto vyšetřování setkáváme. Tyto těžkosti jsou typické pro grupy, jež nemají konečný systém generátorů. Zdůrazňují to i výsledky H. PRÜFFERA, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Zeit., 17 (1923), 35—61, kterých dosahuje pomocí pojmu „hodnosti“ grupy, založeném na pojmu systému generátorů.

Literatura, týkající se studia systémů generátorů Abelových grup, je velmi chudá; jsou to jen dvě práce polských matematiků: J. ŁOŚ, E. ŚASIADA and Z. SZLONIEWSKI,

¹⁾ Grupou rozumí se vždy aditivně psaná Abelova grupa.

On groups with hereditarily generating systems, Publ. Math. Debrecen, 4 (1956), 351—356 a J. Loš, *On the torsion-free abelian groups with hereditarily generating sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III., 4 (1956), 169—171. Autoři zde studují grupy, jež mají tzv. dědičné posloupnosti generátorů. Přednášející podrobně rozebral a kriticky zhodnotil výsledky obou prací (které jsou pouze částečné a dosti složité). Hlavním nedostatkem je to, že autoři nechápou systém generátorů jako množinu (tentýž prvek se může i nekonečněkrát opakovat).

Přednášející pak přistoupil k vlastním výsledkům; zavedl nejprve následující definice:

Definice 1. Soustavu generátorů \mathfrak{G} grupy G nazveme *ireducibilní*, jestliže pro každý prvek $g \in G$ platí $\{\mathfrak{G} \setminus \{g\}\} \neq G$;²⁾ v opačném případě mluvíme o *reducibilní* soustavě generátorů. Soustavu generátorů \mathfrak{G} nazveme *silně reducibilní*, jestliže pro každý prvek $g \in \mathfrak{G}$ je $\{\mathfrak{G} \setminus \{g\}\} = G$. Jestliže \mathfrak{G} je reducibilní systém generátorů grupy G s vlastností, že každá jeho podmnožina, která je systémem generátorů grupy G , je též reducibilní, řekneme, že \mathfrak{G} je *dědičně reducibilní*. Ve stejném smyslu mluvíme o *dědičně silně reducibilním* systému generátorů.

Definice 2. Řekneme, že grupa G je *dostižitelná*, jestliže existuje vlastní podgrupa $H \subset G$ a prvek $g \in G$ tak, že $\{H, g\} = G$.

Potom platí:

Věta 1. *Budiž G divisibilní. Potom G není dostižitelná.*

Věta 2. *Nechť $G \neq 0$ není dostižitelná. Potom každý systém generátorů grupy G je silně reducibilní.*

Věta 3. *Nechť každý systém generátorů grupy G je silně reducibilní. Potom G je divisibilní.*

Odtud tedy mimo jiné dostáváme další dvě charakterisace divisibilních grup:

1. $G \neq 0$ je *divisibilní* \Leftrightarrow ³⁾ *každý systém generátorů grupy G je silně reducibilní* \Leftrightarrow *každý systém generátorů grupy G je dědičně silně reducibilní.*

2. G je *divisibilní* \Leftrightarrow G *není dostižitelná.*

Na příkladě grupy $G_1 = G(p^\infty) + G(p)$ bylo ukázáno,⁴⁾ že k tomu, aby G byla divisibilní, nestačí, aby každý systém generátorů byl dědičně reducibilní. Podle definice 1 je logicky možných šest typů systémů generátorů:

- (I) reducibilní systém generátorů, který není silně reducibilní ani dědičně reducibilní;
- (II) silně reducibilní systém generátorů, který není dědičně reducibilní (a tedy ani dědičně silně reducibilní);
- (III) dědičně reducibilní systém generátorů, který není silně reducibilní;
- (IV) dědičně reducibilní systém generátorů, který je zároveň silně reducibilní a není dědičně silně reducibilní;
- (V) dědičně silně reducibilní systém generátorů;
- (VI) ireducibilní systém generátorů.

Příklad grupy $G_2 = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$ ukazuje, že grupa může mít všechny zavedené typy generátorů.

²⁾ Symbol $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ značí rozdíl množin \mathfrak{M} a \mathfrak{N} .

³⁾ \Leftrightarrow značí logickou ekvivalenci.

⁴⁾ $G(p^\infty)$ značí Prüferovu grupu typu p^∞ , $G(p)$ cyklickou grupu řádu p (p je prvočíslo).

Přednášející postavil pak obrácenou otázku:

Budiž dána grupa G ; jaké kombinace zavedených typů systémů generátorů mohou v grupě G nastat?

Odpověď na tuto otázku usnadňují následující věty, jejichž důkazy jsou na rozdíl od důkazů vět 1, 2 a 3 složitější (s výjimkou věty 5).

Věta 4. Dostižitelná grupa, která má systém generátorů typu (V), má též systém generátorů typu (III).

Věta 5. Grupa, mající systém generátorů typu (IV), má též systém generátorů typu (III).

Věta 6. Má-li grupa systém generátorů typu (III), má též systém generátorů typu (IV).

Důkaz věty 6 se opírá o dvě důležitá lemmata:

Lemma 1. Budiž \mathfrak{G} dědičně reducibilní systém grupy G , $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina. Potom též $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$ je dědičně reducibilní systém generátorů grupy G .

Lemma 2. Budiž \mathfrak{G} ireducibilní systém generátorů grupy G ; budiž dále $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina taková, že platí: Existuje $\bar{g} \in \mathfrak{G}$ tak, že

$$\bar{g} \in \{\mathfrak{G} \setminus \{\bar{g}\}, \mathfrak{G}_0\} \text{ a } \bar{g} \text{ non } \in \{\mathfrak{G} \setminus \{\bar{g}\}, \mathfrak{G}_0'\}, \text{ kde } \mathfrak{G}_0' \subsetneq \mathfrak{G}_0.$$

Potom existuje ireducibilní systém generátorů $\bar{\mathfrak{G}}$ grupy G s vlastnostmi

$$\bar{\mathfrak{G}} \subset (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0), \quad \bar{\mathfrak{G}} \supseteq \mathfrak{G}_0, \quad \bar{g} \text{ non } \in \bar{\mathfrak{G}}.$$

Z těchto výsledků pak snadno usoudíme na tyto možnosti kombinací: Grupa G má systémy generátorů

1. pouze typu (VI) ($\Leftrightarrow G = 0$);
2. typů (VI) a (I) ($\Leftrightarrow G = G(2)$);
3. typů (VI), (I) a (II) (např. každá nenulová grupa $G \neq G(2)$ s konečným počtem generátorů);

4. typů (VI), (I), (II), (III) a (IV) (např. grupa $G_3 = G(p^\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$);

5. typů (VI), (I), (II), (III), (IV) a (V) (např. grupa G_2);

6. typů (III), (IV) a (V) (např. grupa G_1);

7. pouze typu (V) ($\Leftrightarrow G \neq 0$ divisibilní).

Jedinou další možnou kombinací by mohla být:

8. Grupa G má systémy generátorů typu (III) a (IV).

Odpověď na otázku, zda tato možnost může nastat (tj. zda taková grupa G existuje) nebo ekvivalentně: zda existuje grupa, jež nemá systém generátorů typu (V) ani typu (VI), zůstává zatím otevřeným problémem.

První část práce je otištěna v časopise Чех. мат. журнал, 8 (1958), 54—61.

Vlastimil Dlab, Praha

TRANSFORMACE VÍCEROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

(Vlastní referát JOSEFA KRÁLE o přednášce proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 24. února 1958.)

Bud G otevřená množina v E_m a nechť Φ je „hladké“ zobrazení množiny G do E_m . Označme symbolem $D_\Phi(t)$ jakobián transformace Φ v bodě t a předpokládejme, že