Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

3. Buď P normovaný lineární prostor. Najděte nějakou podmínku postačující k tomu, aby existoval v P skalární součin takový, aby norma jím vytvořená byla ekvivalentní s původní normou.

Karel Karták, Praha

4. Označme $M_h(n)$ množinu všech reálných čtvercových n-řádkových matic hodnosti h, $P_h(n)$ množinu všech symetrických nezáporně definitních matic z $M_h(n)$, $O(n)$ množinu všech ortogonálních matic z $M_n(n)$. Dále definujme pro reálnou matici $A = (a_{ij})$ matici $\operatorname{sgn} A = (\operatorname{sgn} a_{ij})$.

Najděte množiny všech matic s prvky 0, 1 a -1, které vzniknou jako matice $\operatorname{sgn} A$ pro a) $A \in M_h(n)$, b) $A \in P_h(n)$, c) $A \in O(n)$.

Miroslav Fiedler, Praha

Řešení úlohy 1 (autor *Jiří Sedláček*) z č. 1, roč. *83* (1958), str. 101:

Začneme pomocnou úvahou. Platí

$$|b_k - b_{k+1}| \leqq \frac{1}{k+1}. \tag{1}$$

Je-li totiž $b_k = \frac{r}{k}$, potom člen b_{k+1} může být roven buď $b'_{k+1} = \frac{r}{k+1}$, nebo $b''_{k+1} = \frac{r+1}{k+1}$. Tedy

$$b''_{k+1} - b'_{k+1} = \frac{1}{k+1}, \quad b'_{k+1} < b_k \leqq b''_{k+1},$$

odtud

$$|b_k - b_{k+1}| \leqq |b''_{k+1} - b'_{k+1}| = \frac{1}{k+1}.$$

Budeme nyní dokazovat druhou část úlohy. Položme $\alpha = \underline{\lim}\, b_k$, $\beta = \overline{\lim}\, b_k$. Je zřejmě $\alpha \leqq \beta$. Budiž $\alpha = \beta$. Potom má posloupnost jedinou hromadnou hodnotu, kterou je možno považovat za uzavřený interval, jehož krajní body splývají. Budiž $\alpha < \beta$. Dokážeme, že potom každé γ splňující nerovnost $\alpha < \gamma < \beta$ je hromadnou hodnotou posloupnosti $\{b_k\}$. Protože žádný bod $\gamma < \alpha$ ani $\gamma > \beta$ nemůže být hromadnou hodnotou $\{b_k\}$, bude tím proveden důkaz druhé části úlohy.

Z definice čísel α a β plyne: V každém ε-okolí bodu α existuje nekonečná posloupnost vybraná z $\{b_k\}$, a to $b_{l_1}, b_{l_2}, b_{l_3}, \ldots$. V každém ε-okolí bodu β existuje nekonečná posloupnost vybraná z $\{b_k\}$, a to $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}, \ldots$. Volme ε tak malé, aby $\alpha + \varepsilon < \gamma < \beta - \varepsilon$. Vezměme dále všechna k_i a l_i a seřaďme je do posloupnosti podle velikosti. Ke každému l_i

existuje l_{i+n} (n nezáporné) takové, že po něm bezprostředně v této posloupnosti následuje nějaké k_j (kdyby ne, bylo by indexů k_i jen konečně mnoho — spor).

Budiž nyní dáno η-okolí bodu γ; zvolme $l_i > \frac{1}{\eta}$, tedy $\eta > \frac{1}{l_i}$. Příslušné l_{i+n} dále označíme l, příslušné k_j označíme k.

Všimneme si nyní bodů

$$b_l, b_{l+1}, \ldots, b_k . \tag{2}$$

Pro ně podle (1) zřejmě platí

$$|b_n - b_{n+1}| < \frac{1}{n+1} \leqq \frac{1}{l} \leqq \frac{1}{l_i} < \eta .$$

Přitom je $b_l < \gamma < b_k$. Je tedy v (2) neprázdná množina M bodů ležících před γ a neprázdná množina N bodů ležících za γ nebo s γ totožných. Vezměme z M bod s největším indexem a označme jej $b_{l'}$. Je tedy $b_{l'} < \gamma \leqq b_{l'+1}$. Protože platí $|b_{l'} - \gamma| \leqq |b_{l'} - b_{l'+1}| < \eta$, je $b_{l'}$ v η-okolí bodu γ a je $b_{l'} \neq \gamma$; tedy je γ hromadnou hodnotou posloupnosti $\{b_k\}$.

První část úlohy dokážeme nyní tím způsobem, že sestrojíme posloupnost $\{b_k\}$ takovou, že $\underline{\lim}\, b_k = \alpha$, $\overline{\lim}\, b_k = \beta$.

Nejprve si všimněme tohoto: Je-li dáno $b_k = \frac{r}{k}$ $(r \leqq k)$, liší se $b'_{k+n} = \frac{r}{k+n}$ libovolně málo od nuly, $b''_{k+n} = \frac{r+n}{k+n}$ libovolně málo od 1.

Položíme $b_1 = \frac{0}{1} = 0$. Dále postupujeme takto: Členy $a_2, \ldots, a_{i_1}$ položíme rovny 1, při čemž i_1 volíme tak, že $b_{i_1-1} < \beta \leqq b_{i_1}$. Takové i_1 existuje, neboť b_i se mohou libovolně blížit k 1 a $\beta < 1$. Členy $a_{i_1-1}, \ldots, a_{i_2}$ položíme rovny 0, při čemž i_2 volíme tak, že $b_{i_2-1} > \alpha \geqq b_{i_2}$. Takové i_2 existuje, neboť b_i se mohou libovolně blížit k nule a $\alpha > 0$. Členy $a_{i_2} + 1, \ldots, a_{i_3}$ položíme rovny 1, při čemž i_3 volíme tak, že $b_{i_3-1} < \beta \leqq b_{i_3}$ atd.

Dokážeme, že pro takto sestrojené $\{b_k\}$ je $\beta = \overline{\lim}\, b_k$.

1. Číslo β je hromadná hodnota $\{b_k\}$: V každém ε-okolí β existuje nekonečně mnoho bodů z $\{b_k\}$, např. všechny body $b_{i_{2l+1}}$ pro $l \geqq n$. Zvolíme-li totiž n takové, že $\frac{1}{i_{2n+1}} < \varepsilon$, pak pro $l \geqq n$ je

$$|b_{i_{2l+1}} - \beta| \leqq |b_{i_{2l+1}} - b_{i_{2l+1}-1}| \leqq \frac{1}{i_{2l+1}} \leqq \frac{1}{i_{2n+1}} < \varepsilon.$$

2. Je-li $\beta' > \beta$, pak β' není hromadnou hodnotou. Platí totiž: Pro $k > i_{2l+1}$ je $b_k < \beta + \frac{1}{i_{2l+1}}$; kdyby totiž bylo $b_k \geqq \beta + \frac{1}{i_{2l+1}}$, bylo by $b_{k-1} \geqq \beta$ a tedy $\beta \leqq b_{k-1} < b_k$, což je ve sporu s konstrukcí. Zvolme $\eta = \frac{1}{2}(\beta' - \beta)$, $i_{2l+1} > \frac{1}{\eta}$; potom žádný bod b_k pro $k > i_{2l+1}$ neleží v η-okolí bodu β', tedy tam leží nejvýše konečný počet bodů z $\{b_k\}$, c. b. d. Obdobně se dokáže, že $\alpha = \underline{\lim}\, b_k$.

Z těchto výsledků a z důkazu druhého tvrzení úlohy, který byl podán výše, plyne, že množinou hromadných hodnot $\{b_k\}$ je právě $\langle \alpha, \beta \rangle$. *)

Aleš Pultr, Praha

*) *Poznámka redakce.* Řešení téže úlohy 1 zaslali později též: B. Míšek, Honice a M. Kadlec, Praha.