

Jaroslav Kurzweil

O Diracově funkci v nelineárních diferenciálních rovnicích

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 362--363

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108292>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

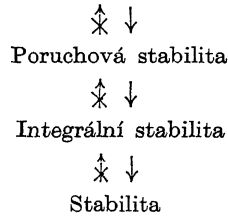
Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

V autonomním případě se vztahy mezi jednotlivými druhy stability změnil. Je:

Asymptotická st. \Leftrightarrow Silná st. \Leftrightarrow Asympt. integrální stabilita



Ivo Vrkoč, Praha

O DIRACOVĚ FUNKCI V NELINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH

(Referát o přednášce dr. JAROSLAVA KURZWEILA konané ve schůzi matematické obce pražské dne 13. ledna 1958.)

Naším cílem je popsat průběh řešení diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x) \cdot \varphi_k(t), \quad (1)$$

jestliže posloupnost $\varphi_k(t)$ se blíží k Diracově funkci. Předpokládáme, že x je vektor z n -dimensionálního Euklidova prostoru E_n , že funkce $f(x, t)$ a $g(x)$ jsou spojité pro $x \in \bar{D}$, $t \in \langle -T_1, T_1 \rangle$, kde \bar{D} je uzávěr omezené otevřené množiny $D \subset E_n$, a nabývají hodnot z E_n ; nechť reálné funkce $\varphi_k(t)$ jsou spojité pro $t \in \langle -T_1, T_1 \rangle$.

Ríkáme, že posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci, jestliže

$$\begin{aligned}
 \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{-T_1}^{T_1} |\varphi_k(t)| dt &= L < \infty, \\
 \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-T_1}^{-\xi} |\varphi_k(t)| dt + \int_{\xi}^{T_1} |\varphi_k(t)| dt &= 0
 \end{aligned}$$

pro každé $\xi > 0$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-T_1}^t \varphi_k(\tau) d\tau = 0$ resp. 1 pro $-T_1 \leq t < 0$ resp. $0 < t \leq T_1$. Posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci pozitivně, konverguje-li k Diracově funkci a je-li $\varphi_k(t) \geq 0$ pro $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Věta 1. *Necheť posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci a necheť funkce $g(x)$ splňuje podmínku*

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \chi_1(\|x_1 - x_2\|), \quad x_1, x_2 \in D,$$

kde $\chi(\eta)$ je spojitá rostoucí pro $\eta \geq 0$, $x(0) = 0$, $\int_0^1 \frac{d\eta}{\chi(\eta)} = \infty$. Necheť $y_k \rightarrow y \in D$, $0 < T_0 < T_1$. Předpokládejme, že řešení $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$, rovnice

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (2)$$

je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $u(-T_0) = y$, že řešení $v(t)$ rovnice

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \quad (3)$$

$v\left(-\frac{1}{2}\right) = u(0)$, je definováno na intervalu $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$ (toto řešení je jednoznačně určeno podle Osgoodovy věty) a že řešení $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0 \rangle$, rovnice (2) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $w(0) = v\left(\frac{1}{2}\right)$.

Potom pro dosti velká k existuje řešení $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, rovnice (1), $x_k(-T_0) = y_k$ a platí $x_k(t) \rightarrow u(t)$ resp. $w(t)$ pro $k \rightarrow \infty$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$ resp. $(0, T_0)$. Posloupnost $x_k(t)$ konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod 0.

Věta 2. Necht posloupnost $\varphi_k(t)$ konverguje k Diracově funkci pozitivně. Necht $y_k \rightarrow y \in D$, $0 < T_0 < T_1$. Předpokládejme, že řešení $u(t)$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$, rovnice (2) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $u(-T_0) = y$, že řešení $v(t)$, $t \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, rovnice (3) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $v(-\frac{1}{2}) = u(0)$ a že řešení $w(t)$, $t \in \langle 0, T_0 \rangle$, rovnice (2) je jednoznačně určeno počáteční podmínkou $w(0) = u\left(\frac{1}{2}\right)$.

Potom pro dosti velká k existuje řešení $x_k(t)$, $t \in \langle -T_0, T_0 \rangle$, rovnice (1), $x_k(-T_0) = y_k$ a platí: $x_k(t) \rightarrow u(t)$ resp. $w(t)$ pro $k \rightarrow \infty$, $t \in \langle -T_0, 0 \rangle$ resp. $t \in (0, T_0)$. Posloupnost $x_k(t)$ konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu, který neobsahuje bod 0.

Jaroslav Kurzweil, Praha

SYSTÉMY GENERÁTORŮ ABELOVÝCH GRUP

(Referát o přednášce VLASTIMILA DLABA přednesené v Matematické obci pražské dne 17. února 1958.)

V úvodu připomněl přednášející některé definice a základní výsledky teorie grup;¹⁾ používal při tom terminologie, kterou navrhuje akademik V. KOŘÍNEK: Grupu, jejíž každý nenulový prvek má konečný (resp. nekonečný) řád, nazveme *periodickou* (resp. *aperiodickou*). Podgrupu všech prvků konečného řádu dané grupy nazveme *periodickou částí* této grupy. Řekneme, že grupa G je *divisibilní*, jestliže každá rovnice $n \cdot x = g$, kde n je celé nenulové číslo, $g \in G$, má v G aspoň jedno řešení; G je tedy *divisibilní* právě tehdy, když pro každé nenulové celé n platí $nG = G$.

Budiž \mathfrak{M} neprázdná množina prvků grupy G ; symbolem $\{\mathfrak{M}\}$ označme nejmenší podgrupu grupy G , obsahující všechny prvky množiny \mathfrak{M} . Řekneme, že \mathfrak{G} je *systém generátorů* grupy G jestliže $\{\mathfrak{G}\} = G$, tj. jestliže každý prvek grupy G je možno vyjádřit jako lineární kombinaci prvků z \mathfrak{G} .

Vlastním obsahem přednášky bylo pak vyšetřování systémů generátorů. Přednášející ukázal nejprve na příkladech těžkosti, s nimiž se při tomto vyšetřování setkáváme. Tyto těžkosti jsou typické pro grupy, jež nemají konečný systém generátorů. Zdůrazňují to i výsledky H. PRÜFFERA, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Zeit., 17 (1923), 35—61, kterých dosahuje pomocí pojmu „hodnosti“ grupy, založeném na pojmu systému generátorů.

Literatura, týkající se studia systémů generátorů Abelových grup, je velmi chudá; jsou to jen dvě práce polských matematiků: J. ŁOŚ, E. ŚAŚIADA and Z. SŁOMIŃSKI,

¹⁾ Grupou rozumí se vždy aditivně psaná Abelova grupa.