

Josef Král

Transformace vícerozměrných integrálů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 365--368

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108294>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Přednášející postavil pak obrácenou otázku:

Budiž dána grupa G ; jaké kombinace zavedených typů systémů generátorů mohou v grupě G nastat?

Odpověď na tuto otázku usnadňují následující věty, jejichž důkazy jsou na rozdíl od důkazů vět 1, 2 a 3 složitější (s výjimkou věty 5).

Věta 4. Dostižitelná grupa, která má systém generátorů typu (V), má též systém generátorů typu (III).

Věta 5. Grupa, mající systém generátorů typu (IV), má též systém generátorů typu (III).

Věta 6. Má-li grupa systém generátorů typu (III), má též systém generátorů typu (IV).

Důkaz věty 6 se opírá o dvě důležitá lemmata:

Lemma 1. Budiž \mathfrak{G} dědičně reducibilní systém grupy G , $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina. Potom též $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0)$ je dědičně reducibilní systém generátorů grupy G .

Lemma 2. Budiž \mathfrak{G} ireducibilní systém generátorů grupy G ; budiž dále $\mathfrak{G}_0 \subseteq G \setminus \mathfrak{G}$ konečná podmnožina taková, že platí: Existuje $\bar{g} \in \mathfrak{G}$ tak, že

$$\bar{g} \in \{\mathfrak{G} \setminus \{\bar{g}\}, \mathfrak{G}_0\} \text{ a } \bar{g} \text{ non } \in \{\mathfrak{G} \setminus \{\bar{g}\}, \mathfrak{G}_0'\}, \text{ kde } \mathfrak{G}_0' \subseteq \mathfrak{G}_0.$$

Potom existuje ireducibilní systém generátorů $\bar{\mathfrak{G}}$ grupy G s vlastnostmi

$$\bar{\mathfrak{G}} \subseteq (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0), \quad \bar{\mathfrak{G}} \supseteq \mathfrak{G}_0, \quad \bar{g} \text{ non } \in \bar{\mathfrak{G}}.$$

Z těchto výsledků pak snadno usoudíme na tyto možnosti kombinací: Grupa G má systémy generátorů

1. pouze typu (VI) ($\Leftrightarrow G = 0$);
2. typů (VI) a (I) ($\Leftrightarrow G = G(2)$);
3. typů (VI), (I) a (II) (např. každá nenulová grupa $G \neq G(2)$ s konečným počtem generátorů);

4. typů (VI), (I), (II), (III) a (IV) (např. grupa $G_3 = G(p^\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} G_i(p)$);

5. typů (VI), (I), (II), (III), (IV) a (V) (např. grupa G_2);

6. typů (III), (IV) a (V) (např. grupa G_1);

7. pouze typu (V) ($\Leftrightarrow G \neq 0$ divisibilní).

Jedinou další možnou kombinací by mohla být:

8. Grupa G má systémy generátorů typu (III) a (IV).

Odpověď na otázku, zda tato možnost může nastat (tj. zda taková grupa G existuje) nebo ekvivalentně: zda existuje grupa, jež nemá systém generátorů typu (V) ani typu (VI), zůstává zatím otevřeným problémem.

První část práce je otištěna v časopise Чех. мат. журнал, 8 (1958), 54—61.

Vlastimil Dlab, Praha

TRANSFORMACE VÍCEROZMĚRNÝCH INTEGRÁLŮ

(Vlastní referát JOSEFA KRÁLE o přednášce proslovené na schůzi matematické obce pražské dne 24. února 1958.)

Bud G otevřená množina v E_m a nechť Φ je „hladké“ zobrazení množiny G do E_m . Označme symbolem $D_\Phi(t)$ jakobián transformace Φ v bodě t a předpokládejme, že

$\int_G |D_\Phi(t)| dt < \infty$. Potom pro skoro všechna $x \in E_m$ je množina $\Phi^{-1}(x)$ konečná a vztah

$$\int_G F(t) |D_\Phi(t)| dt = \int_{E_m} \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \right) dx \quad (1)$$

platí pro každou funkci F na G , pro niž existuje Lebesgueův integrál vlevo (součet za integračním znaméním vpravo má pak smysl pro skoro všechna x , integrál vpravo rovněž existuje a je roven integrálu vlevo). Jednoduchý důkaz obecnějšího tvrzení podal J. MAŘÍK v článku „Transformation of m -dimensional Lebesgue integrals“, Čex. mat. žurnál 6 (81), 1956. Lze očekávat, že integrál na pravé straně formule (1) bude mít smysl i pro jiná zobrazení Φ , než jsou zobrazení „hladká“. To nás vede k následující definici:

Buď G množina typu F_σ^1 v E_m a buď Φ spojitě zobrazení množiny G do E_m . Označme symbolem $N_\Phi(G, x)$ počet bodů množiny $\Phi^{-1}(x) \cap G$ (je-li tato množina nekonečná, klademe $N_\Phi(G, x) = +\infty$) a položme

$$V_\Phi(G) = \int_{E_m} N_\Phi(G, x) dx.$$

Řekneme, že zobrazení Φ má konečnou variaci na množině G , jestliže $V_\Phi(G) < \infty$.

Snadno se zjistí, že funkce $N_\Phi(G, x)$ je borelovsky měřitelná, takže uvedená definice má smysl. (Zobrazení s konečnou variací studoval po prvé S. BANACH v článku „Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie“, Fund. Math., vol. 7, 1925.) Stejným způsobem můžeme ovšem definovat symbol $V_\Phi(M)$ pro každou množinu M typu F_σ , jež je obsažena v G . V případě, že zobrazení Φ má konečnou variaci na G , můžeme množinovou funkci V_Φ (definovanou zatím jen na těch podmnožinách množiny G , jež mají typ F_σ) rozšířit na úplnou a úplně konečnou míru na G . Potom platí

$$\int_G F(t) dV_\Phi(t) = \int_{E_m} \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \right) dx$$

pro každou funkci F na G , pro niž existuje integrál vlevo. Srovnáním tohoto vztahu se vzorcem (1) dostáváme (za příslušných předpokladů o funkci F)

$$\int_G F(t) |D_\Phi(t)| dt = \int_G F(t) dV_\Phi(t)$$

pro „hladké“ zobrazení Φ s integrovatelným jacobianem na otevřené množině G .

Pro transformaci integrálů podle míry V_Φ při spojitě záměně proměnných lze odvodit následující větu:

Buď Ψ spojitě zobrazení otevřené množiny $O \subset E_m$ na množinu $G \subset E_m$ a buď Φ spojitě zobrazení množiny G do E_m . Označme symbolem $\Phi * \Psi$ zobrazení, jež vznikne složením zobrazení Φ, Ψ (tj. $(\Phi * \Psi)(t) = \Phi(\Psi(t))$ pro každé $t \in O$). Má-li zobrazení $\Phi * \Psi$ konečnou variaci na množině O , pak zobrazení Φ má konečnou variaci na množině G a vztah

$$\int_O F(\Psi(t)) dV_{\Phi * \Psi}(t) = \int_G F(x) N_\Psi(O, x) dV_\Phi(x)$$

platí pro každou funkci F na G , pro niž existuje některý z uvedených integrálů (pak existuje i druhý integrál a platí rovnost).

Je-li mimo to zobrazení Ψ prosté, pak $N_\Psi(O, x) = 1$ pro všechna $x \in G$ a uvedená formule ukazuje, že v integrálu $\int_G F(x) dV_\Phi(x)$ můžeme „provést substituci $x = \Psi(t)$ “, aniž bychom změnili jeho hodnotu (nebo porušili jeho existenci).

¹⁾ V dalším nevystačíme s otevřenými množinami; budeme totiž vyšetřovat také obrazy takových množin při spojitých zobrazeních. Proto vyslovujeme naši definici hned pro množiny typu F_σ . Omezení na množiny tohoto typu není ovšem podstatné.

Nyní si všimneme podobných otázek v souvislosti s „orientovanými“ integrály typu $\int_G F(t) D_\Phi(t) dt$; omezíme se pouze na případ $m = 2$.

Je-li Φ spojitě zobrazení otevřené množiny $G \subset E_2$ do E_2 , pak v každém bodě $t \in G$, jenž je izolovaným bodem množiny $\Phi^{-1}(\Phi(t))$, je definován lokální index zobrazení Φ , který označíme $\iota_\Phi(t)$. Zhruba řečeno, má index $\iota_\Phi(t)$ tento názorný význam: Označíme-li K uzavřenou orientovanou křivku, ve kterou přejde zobrazením Φ „dostatečně malá“ kladně orientovaná Jordanova křivka, obsahující bod t ve svém vnitřku, pak $\iota_\Phi(t)$ je topologický index bodu $\Phi(t)$ vzhledem ke křivce K .

Předpokládejme nyní, že zobrazení Φ je „hladké“ a má integrovatelný jakobián na G . Potom platí

$$\begin{aligned} \int_G F(t) D_\Phi(t) dt &= \int_G F(t) \operatorname{sgn} D_\Phi(t) \cdot |D_\Phi(t)| dt = (\text{viz (1)}) = \\ &= \int_G \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \operatorname{sgn} D_\Phi(t) \right) dx, \end{aligned}$$

jakmile existuje výchozí integrál. Avšak $\operatorname{sgn} D_\Phi(t) = \iota_\Phi(t)$ pro každé $t \in G$, pro něž je $D_\Phi(t) \neq 0$. Protože množina $E[t; t \in G, D_\Phi(t) = 0]$ přejde zobrazením Φ v množinu Lebesgueovy míry 0, dostáváme

$$\int_G F(t) D_\Phi(t) dt = \int_G \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \iota_\Phi(t) \right) dx. \quad (2)$$

Poslední integrál má opět smysl pro mnohem širší třídu transformací, než jsou „hladké“ transformace s integrovatelným jakobiánem. Je-li např. Φ spojitě zobrazení otevřené množiny $G \subset E_2$ do E_2 takové, že $V_\Phi(G) < \infty$, pak index $\iota_\Phi(t)$ je definován pro V_Φ — skoro všechna $t \in G$ a funkce ι_Φ je V_Φ — měřitelná na G . Jak ukázal T. RADÓ, je mimo to množina $E[t; t \in G, |\iota_\Phi(t)| > 1]$ spočetná. Jsme tedy oprávněni definovat na G zobecněnou míru \tilde{V}_Φ předpisem

$$\tilde{V}_\Phi(M) = \int_M \iota_\Phi(t) dV_\Phi(t)$$

(pro každou množinu $M \subset G$, jež je měřitelná vzhledem k míře V_Φ). Za příslušných předpokladů o funkci F platí pak vztah

$$\int_G F(t) d\tilde{V}_\Phi(t) = \int_G F(t) \iota_\Phi(t) dV_\Phi(t) = \int_G \left(\sum_{\Phi(t)=x} F(t) \iota_\Phi(t) \right) dx.$$

Odtud dostáváme srovnáním s (2)

$$\int_G F(t) D_\Phi(t) dt = \int_G F(t) d\tilde{V}_\Phi(t)$$

pro ten případ, že zobrazení Φ je „hladké“ a má integrovatelný jakobián. Poslední vztah platí také pro mnohem obecnější diferencovatelné transformace. Podobné otázky jsou vyšetřeny v monografii T. RADÓ: Length and area. O tom, jak se transformují integrály podle míry \tilde{V}_Φ při spojitě záměně proměnných, nás poučuje např. tato věta:

Buď Ψ spojitě zobrazení otevřené množiny $O \subset E_2$ na množinu $G \subset E_2$ a buď Φ spojitě zobrazení množiny G do E_2 . Položme $\tilde{N}_\Psi(O, x) = \sum_{\Psi(t)=x} \iota_\Psi(t)$ pro každé $x \in G$, pro něž je množina $\Psi^{-1}(x) \cap O$ konečná. Je-li $V_{\Phi \circ \Psi}(O) < \infty$, pak je též $V_\Phi(G) < \infty$, funkce $\tilde{N}_\Psi(O, x)$ je definována V_Φ — skoro všude na G a vztah

$$\int_O F(\Psi(t)) d\tilde{V}_{\Phi \circ \Psi}(t) = \int_G F(x) \tilde{N}_\Psi(O, x) d\tilde{V}_\Phi(x)^2$$

platí pro každou funkci F na G , pro niž existuje integrál vlevo.

²⁾ G° je vnitřek množiny G .

V tom případě, že O je oblast a Ψ je homeomorfismus, máme buď $\tilde{N}_{\Psi}(O, x) = 1$ pro všechna $x \in G = G^{\circ}$ nebo $\tilde{N}_{\Psi}(O, x) = -1$ pro všechna $x \in G$; uvedená formule pak ukazuje, že integrál $\int_G F(x) d\tilde{V}_{\Phi}(x)$ je (až na znaménko) „invariantní vůči substituci $x = \Psi(t)$ “.

Stejná tvrzení platí také pro jednorozměrný případ. Integrál podle míry \tilde{V}_{Φ} přejde v Lebesgue - Stieltjesův integrál podle funkce Φ ; zvlášť jednoduchý význam má funkce \tilde{N}_{Ψ} . Z výše uvedené věty dostáváme pak snadno jednoduchou větu o záměně proměnných v Lebesgue-Stieltjesově integrálu.

Josef Král, Praha