Ladislav Drs

O centrální axonometrii

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 83 (1958), No. 3, 330--335

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/108298`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 83 (1958), Praha

O CENTRÁLNÍ AXONOMETRII

LADISLAV DRS, Praha

(Došlo dne 10. září 1957) DT:515.69

Věty obsažené v této práci umožňují vytvoření takové rovinné bodové konfigurace, kterou lze považovat za středový průmět bodů určujících pravoúhlou souřadnicovou soustavu v prostoru s jednotkovými body na osách souřadnic.

Úvahy jsou vázány na eukleidovský prostor rozšířený o nevlastní rovinu.

Definice 1. *Souřadnicová konfigurace* je konfigurace bodů O', J_1', J_2', J_3', U_1' U_2', U_3' splňujících tyto podmínky:

1. body O', J_1', J_2', J_3' jsou vlastní;
2. úsečky $\overline{O'J_1'}$, $\overline{O'J_2'}$, $\overline{O'J_3'}$ jsou stejně dlouhé a navzájem kolmé;
3. body U_1', U_2', U_3' jsou nevlastní body přímek $x_i' = O'J_i'$ $(i = 1, 2, 3)$.

Definice 2. *Přípustná konfigurace* je konfigurace bodů O, J_1, J_2, J_3, U_1, U_2, U_3 vlastní roviny ϱ splňujících tyto podmínky:

1. body O, J_i, U_i jsou různé body téže přímky x_i $(i = 1, 2, 3)$;
2. alespoň dvě z přímek x_1, x_2, x_3 jsou různé;
3. body U_1, U_2, U_3 neleží na přímce.

Jsou-li přímky x_1, x_2, x_3 navzájem různé, zaveďme toto označení:

$A_i = J_jJ_k \cap U_jU_k$.*) Body A_1, A_2, A_3 leží podle Desarguesovy věty na přímce p. Je-li např. $x_i = x_j$, označme $A_i = J_jJ_k \cap U_jU_k$, $A_j = J_iJ_k \cap U_iU_k$, $p = A_iA_j$, $A_k = p \cap x_i$. Stanovme harmonický pól P přímky p vzhledem k trojúhelníku $U_1U_2U_3$.**) Kuželosečka určená polárním trojúhelníkem $U_1U_2U_3$ a pólem P s polárou p je imaginární. Neprotíná totiž reálně žádnou stranu svého polárního trojúhelníka, jak se snadno dokáže. Involuce sdružených pólů, kterou tato kuželosečka indukuje na přímce U_iU_j, má jeden pár U_i, U_j a druhý pár $A_k = p \cap U_iU_j$, $\overline{A}_k = PU_k \cap U_iU_j$ je jím rozdělován.

*) Indexy i, j, k jsou navzájem různá čísla 1, 2, 3.

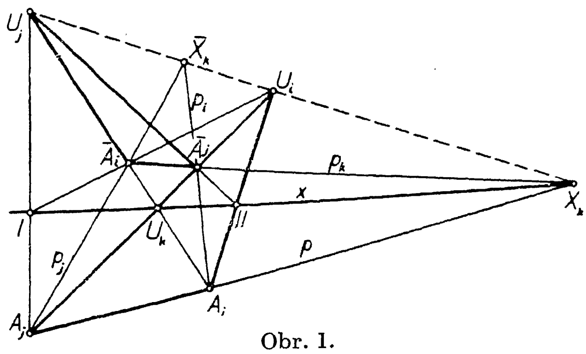
**) Slovem „trojúhelník" rozumíme trojici nekolineárních bodů vlastních nebo nevlastních.

Involuce je eliptická a její samodružné body, tj. hledané průsečíky, jsou imaginární.

V dalších úvahách nahradíme tuto kuželosečku kuželosečkou k, která ji reálně zastupuje. Nazveme ji kuželosečkou *přidruženou* k přípustné konfiguraci. Kuželosečka k je tedy definována antipolárním trojúhelníkem $U_1U_2U_3$ a antipolárním párem P, p. Jestliže je tato kuželosečka kružnicí, pak její Laguerrovy body jsou na kolmici vedené středem kružnice k k její rovině ϱ ve vzdálenosti rovné poloměru kružnice k.

Platí tato základní věta:

Přípustná konfigurace je středovým průmětem souřadnicové konfigurace právě tehdy, když je přidružená kuželosečka k kružnicí. Střed promítání S je Laguerrův bod kružnice k.



Obr. 1.

Důkaz je uveden v práci [2].

Poznamenejme jen, že přípustnou konfigurací s přidruženou kružnicí není souřadnicová konfigurace určena jednoznačně. Bod O' lze totiž zvolit kdekoli na přímce SO, kromě jejího bodu nevlastního a bodu S.

Věta 1. *Má-li přípustná konfigurace přidruženou kružnici k, pak platí: Body A_k, $\overline{A}_k = PU_k \cap U_iU_j$ jsou společným párem dvou involucí: involuce I'_k, jejíž samodružné body jsou U_i, U_j, a involuce I''_k sdružených antipólů kružnice k na přímce U_iU_j.*

Důkaz. Bod P je harmonickým pólem přímky p vzhledem k trojúhelníku $U_1U_2U_3$ a proto platí: $(U_i, U_j, A_k, \overline{A}_k) = -1$; body A_k, $\overline{A}_k$ jsou párem involuce I'_k. Protože pár P, p je antipolární pár kružnice k, náleží pár A_k, $\overline{A}_k$ involuci I''_k. Involuce I'_k je hyperbolická, neboť má reálné samodružné elementy. Involuce I''_k je, jak známo, eliptická. Společný pár A_k, $\overline{A}_k$ obou involucí je reálný.

Sestrojíme-li body A_i, $\overline{A}_i$ ($i = 1,2\ 3$) na přímce $U_j\,U_k$, leží vždy po třech na čtyřech přímkách. Uvažujme nejprve jen dva páry A_i, $\overline{A}_i$; A_j, $\overline{A}_j$ (obr. 1).

Určují čtyřroh o stranách $p = A_iA_j$, $p_i = A_i\bar{A}_j$, $p_j = \bar{A}_iA_j$, $p_k = \bar{A}_i\bar{A}_j$. Bod U_k je vrcholem diagonálního trojúhelníka tohoto čtyřrohu, body U_i, U_j leží na protilehlé straně diagonálního trojúhelníka a jeho další dva vrcholy $X_k = p_k \cap p$, $\bar{X}_k = p_i \cap p_j$ jsou a) harmonicky sdružené vzhledem k základním bodům U_i, U_j, jak plyne z vlastností úplného čtyřrohu, b) antipolárně sdruženy vzhledem ke kružnici k, jak dokážeme.

Antipolára x bodu $\bar{X}_k$ je spojnicí antipólů I, II přímek p_i, p_j, tj. bodů $I = \bar{A}_iU_i \cap A_jU_j$. $II = \bar{A}_jU_j \cap A_iU_i$. Antipolára $x = I\,II$ prochází bodem X_k, neboť je to osa perspektivních trojúhelníků $A_iA_jU_i$, $\bar{A}_i\bar{A}_jU_j$, a proto obsahuje průsečík sobě odpovídajících přímek A_iA_j, $\bar{A}_i\bar{A}_j$, tj. bod X_k. Body X_k, $\bar{X}_k$ jsou proto společnými body involucí I'_k, I''_k na přímce U_iU_j. Kdyby byl tento pár jiný, než dříve sestrojený pár A_k, $\bar{A}_k$, měly by obě involuce více než jeden společný pár, což není možné, a proto $X_k = A_k$, $\bar{X}_k = \bar{A}_k$.

Věta 2. *Má-li přípustná konfigurace přidruženou kružnici k, jsou body A_k, $\bar{A}_k$ samodružnými body involuce I na přímce U_iU_j, jejíž páry L^a, L^h jsou takto definovány:*

K libovolnému bodu $L \in U_iU_j$ je bod L^a antipolárně sdružen vzhledem ke kružnici k, bod L^h harmonicky sdružen vzhledem k základním bodům U_i, U_j.

Důkaz je uveden v práci [2].

Věty 1, 2 charakterisovaly projektivní vlastnosti přímky p. Uvažujme nyní o významu přímky p v prostoru.

Věta 3. *Má-li přípustná konfigurace přidruženou kružnici k, leží přímka p v rovině π jdoucí středem promítání S rovnoběžně s rovinou $J'_1J'_2J'_3$ z příslušné souřadnicové konfigurace.* (Je to tedy úběžnice roviny $J'_1J'_2J'_3$.)

Důkaz. Nevlastní přímka p' roviny $J'_1J'_2J'_3$ je osou prostorové perspektivity mezi trojúhelníky $J'_1J'_2J'_3$, $U'_1U'_2U'_3$. Její průmět p je proto přímka v rovině, kterou udává věta.

Dále uvedeme věty, umožňující konstrukci přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí, jsou-li známy jen některé body a přímky přípustné konfigurace. Na základě přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí lze pak řešit až na podobnost, vzhledem k poznámce za základní větou, metrické úlohy centrální axonometrie nepřímo a to tím způsobem, že je převedeme na tytéž úlohy v jakémkoli jiném promítání, které užívá také souřadnicovou soustavu a ve kterém lze tyto úlohy řešit snadněji. Na příklad v promítání Mongeově by bodům O, J_1, U_1 odpovídaly projektivně na ose x_{12} body O_{12} J^x_{12} (libovolně volitelný) a nevlastní bod osy x_{12}; bodům J_2, J_3 by odpovídaly body J^y_1 na ose y_1 (kde $\overline{O_{12}J^y_1} = \overline{O_{12}J^x_{12}}$) a J^z_2 na ose z_2 (kde $\overline{O_{12}J^z_2} = \overline{O_{12}J^x_{12}}$), a bodům U_2, U_3 nevlastní body os y_1, z_2.

Až do konce budeme předpokládat, že dané a volené body a přímky splňují tytéž předpoklady, jako stejně označené body a přímky přípustné konfigurace.

Věta 4. *Mějme dány body* U_1, U_2, U_3*. Pak přípustná konfigurace s přidruženou kružnicí existuje právě tehdy, když*

a) *jsou body* U_i, U_j *vlastní a bod* U_k *leží uvnitř pásu, omezeného kolmicemi na přímku* U_iU_j *jdoucími body* U_i, U_j *a současně vně kruhu nad průměrem* U_iU_j;

b) *je bod* U_i *vlastní,* U_j *nevlastní a bod* U_k *leží kdekoli na kolmici bodem* U_i *k přímce* U_iU_j *kromě bodu* U_i;

c) *jsou body* U_i, U_j *nevlastní, směry je určující kolmé a bod* U_k *vlastní.*

Důkaz. Podmínky jsou nutné a vyplývají z toho, že trojúhelník $U_1U_2U_3$ přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí je antipolárním trojúhelníkem této kružnice. Podmínky jsou dostačující. Kružnice k, mající $U_1U_2U_3$ za antipolární trojúhelník, je v případě a) určena jednoznačně, v případě b) má za střed jakýkoliv vnitřní bod úsečky U_iU_k, je-li U_k vlastní, a bod U_i, je-li U_k nevlastní; v případě c) má střed v bodě U_k a libovolný poloměr. Sestrojíme dále přímku p podle některé z předcházejících vět. Zvolíme bod O a tím i přímky x_1, x_2, x_3 ($x_i = OU_i$). Na přímce x_i zvolíme bod J_i a zbývající body J_j, J_k sestrojíme tak, aby trojice bodů J_1, J_2, J_3 byla perspektivní s trojúhelníkem $U_1U_2U_3$ vzhledem k ose perspektivity p. Tím je určena přípustná konfigurace s přidruženou kružnicí a věta je dokázána.

Věta 5. *Nechť jsou dány body* O, J_i, J_j, U_i, U_j*. Pak přípustná konfigurace* O, J_1, J_2, J_3, U_1, U_2, U_3 *s přidruženou kružnicí* k *existuje,*

α) *je-li nejvýše jeden z bodů* U_i, U_j *nevlastní, vždy;*

β) *jsou-li oba body* U_i, U_j *nevlastní, právě tehdy, když přímky* x_i, x_j *jsou kolmé a* $\overline{OJ_i} = \overline{OJ_j}$.

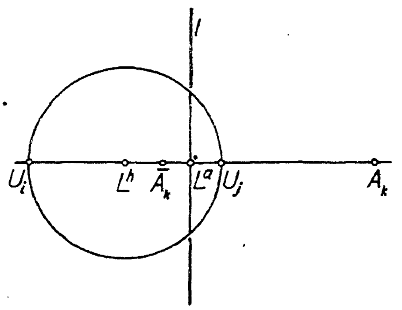
Důkaz. a) Budiž $x_i \neq x_j$. Sestrojme na přímce U_iU_j body $A_k = J_iJ_j \cap U_iU_j$, $\overline{A}_k$, kde $(A_k, \overline{A}_k, U_i, U_j) = -1$, (obr. 2). Body A_k, $\overline{A}_k$ jsou samodružnými body involuce I z věty 2. K nevlastnímu bodu L přímky U_iU_j je bod L^h z involuce I určen podmínkou $(L, L^h, U_i, U_j) = -1$ a jemu odpovídající bod L^a v involuci I vztahem $(L^h, L^a, A_k, \overline{A}_k) = -1$. Antipolára l bodu L prochází bodem L^a kolmo k přímce U_iU_j a na ní leží bod U_k. Zvolme přímku x_k tak, aby průsečík $x_k \cap l = U_k$ splňoval větu 4. Jsou-li body U_i, U_j vlastní, zvolíme ji tak, aby bod U_k byl vně kruhu nad průměrem $\overline{U_iU_j}$, neboť bod L^a je vnitřním bodem úsečky $\overline{U_iU_j}$ a tedy přímka l uvnitř pásu, omezeného kolmicemi k přímce U_iU_j jdoucími body U_i, U_j. Je-li bod U_i vlastní, U_j nevlastní, je $L^h = U_i = L^a$ a bod U_k zvolme kdekoli na přímce l. Jsou-li body U_i, U_j nevlastní, je podmínka $x_i \perp x_j$ nutná, jak vyplývá z věty 4. Jako bod U_k zvolme libovolný bod a sestrojme kružnici k se středem U_k a libovolným poloměrem. Dále musí platit $J_iJ_j \parallel p = (k \cap U_iU_k) \cup (k \cap U_jU_k)$, což nastane tehdy, když $\overline{OJ_i} = \overline{OJ_j}$. Je zřejmé, že podmínky jsou též dostačující.

b) Budiž $x_i = x_j$. Obě trojice J_1, J_2, J_3; U_1, U_2, U_3 přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí jsou perspektivní. Střed perspektivity je bod O, osou přímka p. Pro bod $A_k = p \cap x_i$ platí proto podmínka $(O, A_k, J_i, U_i) = (O, A_k, J_j, U_j)$; určíme-li ještě bod $\bar{A}_k$ tak, aby platilo $(A_k, \bar{A}_k, U_i, U_j) = -1$, lze potom postupovat stejně, jako v části a).

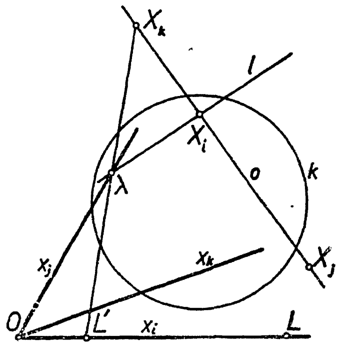
Věta 6. *Mějme dánu kružnici k a přímky x_1, x_2, x_3. Pak přípustná konfigurace s přidruženou kružnicí k a s body J_i, U_i $(i = 1, 2, 3)$ na přímce x_i existuje*

a) *pro $x_i \neq x_j$ právě tehdy, když involuce I, definovaná v důkazu věty, na přímce x_i je hyperbolická;*

b) *pro $x_i = x_j$ právě tehdy, jsou-li přímky x_i, x_k antipolárně sdruženy vzhledem ke kružnici k.*



Obr. 2.



Obr. 3.

Důkaz. a) Budiž $x_i \neq x_j$ (obr. 3). Podmínka je nutná: Trojúhelník $U_1U_2U_3$ přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí k je antipolární vzhledem ke kružnici k. Proto prochází každá jeho strana antipólem X_i přímky x_i $(i = 1, 2, 3)$ vzhledem ke k. Tyto body leží na antipoláře o bodu O vzhledem ke k. Máme tedy sestrojit trojúhelník, jehož strany procházejí body X_1, X_2, X_3 a který je antipolárním trojúhelníkem kružnice k. Zvolme libovolný bod $L \in x_i$. Budiž l jeho antipolára, $\lambda = x_j \cap 1$, $\lambda X_k \cap x_i = L'$. Tím je definována involuce I párů L, L' na přímce x_i. Kdyby byl $L = L'$, byla by příslušná antipolára l stranou hledaného trojúhelníka a dále by byl $U_j = l \cap x_j$, $U_k = l \cap x_k$, $U_i = L$. Je tedy samodružný bod involuce I hledaným bodem U_i. Aby byl reálný, musí být involuce I hyperbolická. Podrobněji o tom pojednávají práce [1], [2]. Je-li naopak podmínka splněna, sestrojíme trojúhelník $U_1U_2U_3$ a pokračujeme jako v důkazu věty 4.

b) Budiž $x_i = x_j$. Podmínka je nutná. Přímka $x_i = x_j$ přípustné konfigurace s přidruženou kružnicí k je stranou antipolárního trojúhelníka kružnice k, bod U_k jejím antipólem a tedy přímka x_k $(U_k \in x_k)$ antipolárně sdružena s přímkou x_i. Podmínka je dostačující: Bod U_i zvolíme na přímce x_i libovolně, bod U_j sestrojíme tak, aby byl s bodem U_i antipolárně sdružen vzhledem ke k a pokračujeme jako v důkazu věty 4.

Věta 7. *Mějme dánu kružnici k, přímky x_i, x_j a bod U_i. Pak přípustná konfigurace $O, J_1, J_2, J_3, U_1, U_2, U_3$ s přidruženou kružnicí k a s přímkami $x_i = J_iU_i$ $(i = 1, 2, 3)$ existuje*

a) *právě tehdy, když $x_i \neq x_j$ a body U_j, $O = x_i \cap x_j$ nejsou antipolárně sdružené vzhledem ke kružnici k;*

b) *vždy, když $x_i = x_j$.*

Důkaz. a) Podmínka je nutná: Antipolární trojúhelník kružnice k má vrchol U_j v průsečíku antipoláry u_i bodu U_i vzhledem ke kružnici k s přímkou x_j. Aby to mohl být bod přípustné konfigurace, musí být $O = x_i \cap x_j \neq U_j = u_i \cap x_j$. Podmínka je dostačující: Bod U_k je antipólem přímky U_iU_j; dále pokračujeme jako v důkazu věty 4.

b) Budiž $x_i = x_j$. Bod $U_j \in x_i$ je antipolárně sdružen s bodem U_i vzhledem ke kružnici k. Antipól přímky x_i je bod U_k. Dále pokračujeme jako v důkazu věty 4.

LITERATURA

[1] *Н. Ф. Четверухин:* Основная теорема аксонометрии и построение аксонометрических систем в центральной проекции, Сб. статей: Методы начертательной геометрии и ее приложения, Москва 1955.

[2] *L. Drs:* O základní větě centrální axonometrie. Časopis pro pěst. mat., *82* (1957), 165 —174.

Резюме

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ

ЛАДИСЛАВ ДРС, (Ladislav Drs), Прага

(Поступило в редакцию 10/IX 1957 г.)

В работе доказаны теоремы, определяющие плоскую точечную конфигурацию, которую можно считать центральной проекцией прямоугольной системы координат в пространстве с единичными точками на координатных осях.

Zusammenfassung

ÜBER DIE ZENTRALE AXONOMETRIE

LADISLAV DRS, Praha

(Eingelangt am 10. September 1957)

In dieser Arbeit beweist man Sätze, die Konstruktionen einer solchen ebenen Punktkonfiguration ermöglichen, welche man als Zentralprojektion eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems mit Einheitspunkten an den Koordinatenachsen ansehen kann.