

František Hladík

Poznámka o řešení rovnice $y'' + fy' + \varphi y = 0$, jejíž jedno partikulární řešení je derivací druhého

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 85 (1960), No. 2, 202--203

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108376>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

POZNÁMKA O ŘEŠENÍ ROVNICE $y'' + fy' + \varphi y = 0$, JEJÍŽ JEDNO
PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ JE DERIVACÍ DRUHÉHO

FRANTIŠEK HLADÍK, Písek

(Došlo dne 8. prosince 1959)

Mějme rovnici

$$(1) \quad y'' + fy' + \varphi y = 0,$$

kde f a φ jsou funkce, mající v otevřeném intervalu J spojitě derivace 2. řádu, při čemž $f'(x) \neq 0$ všude v J .

Věta. *K tomu, aby rovnice (1) měla v J partikulární řešení A , jehož derivace $A' = B$ je též řešením (1), je nutné a stačí, aby f a φ splňovaly v J rovnici*

$$(2) \quad u' + fu + u^2 + \varphi = 0, \quad \text{kde} \quad u = -\frac{\varphi'}{f'}.$$

Je-li tato podmínka splněna, je

$$(3) \quad A = \exp\left(-\int \frac{\varphi'}{f'} dx\right).$$

Poznámka. Ověříme-li tedy platnost (2), můžeme napsat ihned dvě partikulární řešení rovnice (1):

$$A = \exp \int u dx, \quad B = A' = u \exp \int u dx.$$

Důkaz. Necht A a A' jsou řešeními (1) v J ; pak je v J

$$(4) \quad A'' + fA' + \varphi A = 0,$$

$$(5) \quad A''' + fA'' + \varphi A' = 0.$$

Derivujeme-li (4) a užijeme-li vztahu (5), dostaneme ihned vztah

$$(6) \quad f'A' + \varphi'A = 0,$$

z něhož plyne (3).

Položme $u = -\frac{\varphi'}{f'}$; derivováním (3) dostaneme postupně

$$(7) \quad A' = Au,$$

$$(8) \quad A'' = A'u + Au' = A(u^2 + u');$$

dosadíme-li (7) a (8) do (4) a zkrátíme-li A , získáme ihned vztah (2), který je tedy nutnou podmínkou pro platnost (4) a (5).

Dokažme, že (2) je postačující podmínkou existence funkce A , splňující (4) i (5): Položíme-li $A = \exp \int u \, dx$, tj. je-li $u = \frac{A'}{A}$, bude podle (2)

$$\frac{A''A - A'^2}{A^2} + f \frac{A'}{A} + \frac{A'^2}{A^2} + \varphi = 0,$$

tj. bude platit (4). Vzhledem k tomu, že jsme zvolili A tak, že $u = -\frac{\varphi'}{f} = \frac{A'}{A}$ tj. $f'A' + \varphi'A = 0$, plyne z rovnice (4) (derivováním) rovnost (5).

Příklad. Rozřešíme popsanou metodou rovnici

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0.$$

Jest $f(x) = -4x$, $\varphi(x) = 4x^2 - 2$, takže $u = 2x$. Dosazením se přesvědčíme, že (2) platí. Řešení jsou tedy

$$A = \exp x^2, \quad B = A' = 2x \exp x^2.$$

Literatura

E. Kamke: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. Lipsko, 6. vydání, 1959.