Kdyby byla dána podmínka, aby nějaký trojúhelník *abc* v průmětně byl polárným vzhledem ku kontuře průmětu plochy P, což jak známo třem prostým podmínkám odpovídá, tu bychom opakujíce předešlou konstrukci dvakrát, obdrželi dva body jako středy promítání.

Na tomto základě bychom ustanovili střed promítání, kdyby byly v průmětně určeny sdružené průměry neb osy kontury, ovšem jen co do polohy.

Kombinováním těchto tří případů obdržíme celou řadu úkolů, které spůsoby svrchu uvedenými dají se snadno řešiti. Nutno arci přihlížeti k tomu, aby počet podmínek nebyl překročen, aneb je-li překročen, aby řešení bylo možné, což se v každém případu zvlášť musí vyšetřiti.

Kdyby místo plochy byla určena křivka stupně 2-ho *P* a měl se stanoviti střed promítání tak, aby její průmět některé ze svrchu uvedených podmínek vyhovoval, tu bychom postupovali týmž spůsobem jako při ploše. Příslušná modifikace řešení jest tak jednoduchá, že netřeba se o ní šířiti.

Řešení úlohy 12. v XI. ročníku tohoto časopisu.

Podává

Theodor Monin,

assistent při c. k. české vysoké škole technické v Praze.

V rovinné čáře zvolme dva body A a B, v bodu A sestrojme normálu a protněme ji v bodu C přímkou BC kolmou k tětivě AB. Blíží-li se bod B bodu A, jaké mezi se blíží průsečík C?

Buďte dále A a B dva body na čáře prostorové a buď C průsečík hlavní normály bodu A s rovinou vedenou bodem B kolmo ku tětivě AB, kde jest limita bodu C pro případ, že B se blíží bodu A?

Buď dána libovolná plocha a na ní body A a B. Nechť opět C značí průsečík normály v bodu A s rovinou vedenou bodem B kolmo ku AB. Blíží-li se B opět bodu A, v jakých mezích jest limita průsečíku C? (*W.*)

Křivka kruhová K', opsaná trojúhelníku ABC, dotýká se v bodu A původní křivky K, při čemž jsou body A a C v křivce K' diametrálně protilehlými. Tento vztah potrvá i tehdy, když bod B bude ku A nekonečně blízký, to jest, když K' bude v bodu A oskulovati křivku K. Dle toho bude vzdálenost bodu C', který je limitou bodu C, od bodu A rovna dvěma příslušným poloměrům křivosti křivky K.

Když jest K křivkou prostorovou, platí výsledek tentýž. K důkazu použijeme však plochy kulové L, jejížto střed se nalezá na hlavní normále a která obsahuje body A a B, dotýkajíc se v bodu A křivky K. Tu jest zřejmo, že na této ploše bude se také nalezati bod C, jsa diametrálně protilehlý ku bodu A.

To bude platiti ovšem i pro mezní polohu bodu B, při čemž plocha kulová L bude míti v bodu A s křivkou K dotyk trojbodový, protínajíc příslušnou rovinu oskulační v křivce kruhové křivosti. Tím jest tento případ na předešlý převeden.

Abychom konečně ustanovili mezní polohy bodu C v případu posledním, mysleme si bodem A zcela libovolný normálný pronik. Bod C', který je limitou bodu C pro tento pronik, bude se nalezati na normále ve vzdálenosti AC', rovnající se dvojnásobnému poloměru křivosti, který v bodu A tomuto proniku přísluší. Poněvadž se pak středy křivosti všech normálných proniků nalezají na úsečce, omezené oběma hlavními středy křivosti plochy v bodu A, budou se mezní polohy bodu C nalezati na normále ve dvakrát tak velkých vzdálenostech od bodu A, jako jsou hlavní poloměry křivosti.

Drobné zprávy.

Podává

Matyáš Lerch,

docent při české vysoké školy technické v Praze.

1. Ve svém článku *„O jistém integrálu omezeném“*, uveřejněném ve Zprávách o zas. král. čes. spol. nauk z r. 1886, zabýval jsem se integrálem

$$\int\limits_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} \cos 2\pi v z\, dz = \frac{1}{2}\,\psi(s\,|\,v),$$

kde v je libovolné, a s má realnou část kladnou, a dospěl jsem k tomu výsledku, že lze jej vyjádřiti tvarem

$$(1) \qquad \psi(s|v) = \pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)C(s|v),$$

kde Γ značí známý Eulerův integrál, a kde $C(s|v)$ hoví rovnici

$$(2) \qquad C(s|v) = C(1-s|vi)e^{-\pi v^2},$$

při čemž $C(s|v)$ je celistvá funkce transcendentní obou proměnných s, v daná řadou

$$(3) \qquad C(s|v) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{s}{2}, n\right)\frac{(4\pi v^2)^n}{(2n)!},$$

kde $\left(\frac{s}{2}, n\right) = \frac{s}{2}\cdot\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{s}{2}+n-1\right)$, $\left(\frac{s}{2}, 0\right) = 1.$

Funkce tato jest ovšem pouze zvláštním případem obecnější jedné řady *Kummerovy*, o níž platí vztah podobný rovnici (2). Ale jednak je tento zvláštní případ svou podobností s integrálem Eulerovým zajímavým a jednak bylo radno uveřejniti právě *způsob*, jímž v řečeném pojednání odvodil jsem rovnici (2), vycházeje z relace Cauchy-Poissonovské vyjadřující linearnou transformaci elliptické transcendenty $\vartheta_3(u|\tau)$, kdežto *Kummer* byl ke svému obecnějšímu vztahu veden theorií řady hypergeometrické. V této poznámce upozorňuji na důležitosť vztahu (2), který umožňuje v mnohých případech stanoviti hodnotu našeho integrálu ψ.

Z rovnice (3) je patrno, že $C(s|v)$ je celistvou racionalnou sudou funkcí v stupně $2k$, je-li $s = -2k$, a v tomto případě bude dle (1) integrál ψ tvaru

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \text{ Cel. funkce } (v).$$

Je-li pak s tvaru $2k+1$, (k celistvé $\geqq 0$), bude $1-s$ tvaru $-2k$ a tedy bude dle (2) integrál opět stanovitelný a sice

$$\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-\pi v^2}. \text{ Cel. funkce } (v).$$

V jednom z příštích zasedání předložiti hodlám král. čes. spol. nauk pojednání, které jedná o tomto integrálu z jiného stanoviska a obsahuje více jeho zajímavých vlastností.

2. Ačkoli po Weierstrassovi podána byla celá řada příkladů funkcí spojitých, které nemají funkce odvozené (derivace)

(které otřásly základy starého počtu differencialného), přec poskytuje jich studium začátečníku jisté obtíže, jež není vždy snadno překonati. Kdo by se o jednoduchých v té věci příkladech přesvědčiti chtěl, toho odkazuji na své francouzské pojednání „Contributions à la théorie des fonctions" uveřejněné ve Zprávách o zas. král. čes. spol. nauk z roku 1886, kde methodou naprosto elementárnou dokázáno, že funkce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2^n \pi x}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!\, \pi x}{n!}$$

nemají derivace v místech, jichž je v každém intervallu nekonečně mnoho, která jsou tedy všehustě rozložena po celém oboru realné proměnné x.

3. Geometrům je známo, jakou roli hrají v applikacích příbuznosti zvané involucemi vyšších řádů, jichž theorii zbudovali pp. *Emil Weyr* a *Charles Le Paige.*

Ve svém článku „Bestimmung der Anzahl merkwürdiger Gruppen einer allgemeinen Involution n-ter Ordnung k-ter Stufe" otištěném ve Zprávách král. čes. spol. nauk z r. 1885 ukázal jsem, že má t. zv. obecná involuce stupně n a řádu k celkem

$$\varrho!\binom{n-k}{\varrho} s_1\, s_2 \ldots . s_{\varrho-1}\, s_\varrho$$

skupin, v nichž splývá s_1 prvků v jeden, s_2 prvků v druhý atd. až s_ϱ prvků v ϱ-tý vícenásobný prvek, při čemž

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\varrho = k + \varrho \leqq n.$$

Případy zvláštní, kde $s_1 = s_2 = \ldots = s_\varrho = 2$, $\varrho = k$ a pak $\varrho = 1$, $s_1 = k + 1$, byly před tím vyšetřeny Em. Weyrem, poslední také C. Le Paige-em. Nový důkaz této věty podal pan *Jacques Deruyts* ve zprávách Belgické Akademie věd z r. 1887. (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 3^{me} série, t. XIV, n^0 8).

4. V Mémoires de l'Acad. roy. des Sciences, des Lettres et de Beaux-Arts de Belgique, t. XLV, 1884 uvádí p. *Catalan* str. 52. svého pojednání o řetězcích a řadách větu, že výraz

$$\frac{1 + q^{2n-1}}{(1 + q)\, q^{n-1}},$$

kde q značí jeden z kořenů rovnice $t^2 - a t + 1 = 0$, je *číslo* *celistvé*, jakmile jest a číslem celistvým. Tato věta je bezprostředně patrna. Předně je jasno, že jest onen výraz racionalnou funkcí proměnné a, poněvadž se nemění, přejde-li q v $\frac{1}{q}$, t. j. vymění-li se kořeny rovnice řečené; za druhé je zlomek

$$\frac{1+q^{2n-1}}{1+q}$$

roven polynomu $1-q+q^2-\ldots\pm q^{2n}$, a pak $\frac{1}{q^{n-1}}=(a-q)^{n-1}$, tak že náš výraz lze vyjádřiti jakožto celistvou funkci a, q. Je tedy celistvým číslem algebraickým a zároveň racionalným, tedy číslem celistvým v obyčejném toho slova smyslu, je-li a číslo celistvé.

Úlohy.

Druhé řešení úlohy 12.

Pan *V. Jeřábek,* professor v Brně, který úkol ten proponoval, zaslal jednoduché řešení toto:

Tečna kruhu v bodu O nechť protíná tečny AM, BN v bodech P, R. I jest AP = OP, a poněvadž

$$\sphericalangle \mathrm{MQP} = \mathrm{OAB} = \mathrm{OMP}, \text{ též } \mathrm{MP} = \mathrm{OP},$$

pročež $\mathrm{AP} = \mathrm{PM}$,

a podobně $\mathrm{BR} = \mathrm{RN}$.

Je-li C středem kruhu daného a Q středem úsečky MN, pak příčky CQ, PR, které středy protilehlých stran lichoběžníka ABNM spojují, půlí se na vzájem v bodu S. Poněvadž S a Q jsou dle stálého středu C a poměru $\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{CQ}}=\frac{1}{2}$ podobně položeny, jest geom. místem bodu Q přímka jdoucí rovnoběžně s tečnou OP ve vzdálenosti rovné poloměru CO.

Řešení úlohy 13.

(Zaslal p. *Otakar Havelka,* stud. VIII. tř. v Něm. Brodě.)

Poněvadž $105=3.5.7$, bude

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=\frac{349}{105}$$