Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

K didaktice veličin komplexních. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 5, 265--269

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108855

K didaktice veličin komplexních.

Napsal

M. Lerch,

docent při české vysoké škole technické v Praze.

Mathematika jest v povaze své složitější, než jak se zdá povrchnímu pozorovateli. Během věků podařilo se uděliti methodám a výsledkům algebry jistou *formální* jednoduchosť, nutnou k dalšímu pokroku, která však u začátečníka bývá na újmu jasnosti.

Který z nás nebyl se kdy pozastavil nad theorií čísel záporných a veličin komplexních? A všecky tyto útvary povahy ryze formální nemají jiného významu, než vésti k formálně nejkratší cestě při řešení algebraických problemů a k nejstručnějšímu popisu vlastností obyčejných čísel. Co se tkne čísel záporných, pojednal jsem o nich obšírně ve 4. ročníku „Athenaea" a mohu zde o nich pomlčeti i z toho důvodu, že začátečníku poskytují menší obtíže než veličiny pomyslné, o nichž tuto jednati chceme.

V algebře se vyskytne při řešení rovnice druhého stupně

$$x^2 + 2ax + b = 0$$

často případ, že rovnici té nelze vyhověti žádnou hodnotou veličiny x; a sice nastane tato okolnosť tehdy, kdy v rovnici upravené

$$(x + a)^2 + (b - a^2) = 0$$

jest druhý člen $b - a^2$ kladný; píšeme-li zde $x + a = z$, $b - a^2 = c$, zní tato rovnice

$$z^2 + c = 0,$$

a patrně nebude splněna pro žádné z, poněvadž druhá mocnosť každé veličiny je kladnou.

Symbol $z = \sqrt{-c}$, který by pro případ záporného c rovnici vyhovoval, nemá žádného významu. Mathematikové nicméně podrželi tento v podstatě bezvýznamný symbol $\sqrt{-c}$, a píšíce $-c = c(-1)$, kladli $\sqrt{-c} = \sqrt{c}\sqrt{-1}$, takže absurdita $\sqrt{-c}$ redukována na absurditu jednodušší $\sqrt{-1}$, vše ovšem toliko formálně vzato.

Přesvědčivše se, že lze do počtu zavésti formalismy tvaru $c + d\sqrt{-1}$, a že jimi lze docíliti mnohých zajímavých správných výsledků, považovali mathematikové tento nový tvar za přípustný při úvahách algebraických, aniž se starali o vlastní příčinu a podstatu algebraických zjevů tímto spůsobem se naskytších. Tuto podstatu nalézti a objasniti bude účelem následujících řádků.

1. Literami řecké abecedy α, β, $\gamma\ldots$ znamenati budeme obyčejné veličiny kladné neb záporné. Z libovolných dvou takých veličin α, β sestavme symbol (α, β), který nemá nic jiného vyjadřovati, než že máme na zřeteli dvě čísla, z nichž první jest α, druhé β; my uvažujeme *soustavu* aneb *komplex* (α, β). A budeme psáti $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, jsou-li obě soustavy identické, t. j. je-li $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$. Soustavu (β, α) dlužno považovati za rozdílnou od (α, β), pokud jsou α, β vespolek různy.

Máme-li dvě soustavy (komplexy) (α, β), (γ, δ), pak nazýváme soustavu $(\alpha + \gamma, \beta + \delta)$ součtem komplexů $(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta)$, takže

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\gamma, \delta) + (\alpha, \beta).$$

Mějme na zřeteli několik komplexů

$$a = (\alpha, \alpha'),\ b = (\beta, \beta'),\ c = (\gamma, \gamma'),\ \ldots$$

a utvořme komplexy

$$(a + b) + c = (\alpha + \beta, \alpha' + \beta') + (\gamma, \gamma') = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha' + \beta' + \gamma'),$$
$$a + (b + c),\ (a + c) + b, \text{ atd.},$$

jež všecky mají tutéž hodnotu $(\alpha + \beta + \gamma, \alpha' + \beta' + \gamma')$; kterou pak znamenáme prostě $a + b + c$.

Odtud pak také jasno, co dlužno rozuměti součtem $a + b + c + d$, $a + b + c + d + e$ etc., a že zde platí základní vlastnosti součtu, neměniti se s pořádkem sčítanců.

Z definice součtu plyne přímo definice rozdílu ve tvaru

$$a - b = (\alpha - \beta,\ \alpha' - \beta'),$$

který má vlastnost

$$b + (a - b) = a,$$

podobně jako u čísel. Zde se odporučuje psáti za $a - a = (0, 0)$ prostě 0.

2. Mějme opět komplexy

$$a = (\alpha, \alpha'),\ b = (\beta, \beta'),\ c = (\gamma, \gamma'), \ldots$$

a utvořme z libovolných dvou a, b komplex třetí

$$m = (\alpha\beta - \alpha'\beta',\ \alpha\beta' + \alpha'\beta),$$

který znamenejme ab; bude patrně

$$ab = ba. \tag{1}$$

Vypočtěme nyní komplex $(ab)\,c$, t. j.

$$(\alpha\beta - \alpha'\beta',\ \alpha\beta' + \alpha'\beta)\,(\gamma, \gamma')$$
$$= (\alpha\beta\gamma - \alpha'\beta'\gamma - \alpha\beta'\gamma' - \alpha'\beta\gamma',\ \alpha\beta\gamma' - \alpha'\beta'\gamma' + \alpha\beta'\gamma + \alpha'\beta\gamma),$$

podobně

$$a\,(bc) = (\alpha, \alpha')\,(\beta\gamma - \beta'\gamma',\ \beta\gamma' + \beta'\gamma)$$
$$= (\alpha\beta\gamma - \alpha\beta'\gamma' - \alpha'\beta\gamma' - \alpha'\beta'\gamma,\ \alpha\beta\gamma' + \alpha\beta'\gamma + \alpha'\beta\gamma - \alpha'\beta'\gamma'),$$

takže máme identitu

$$(ab)\,c = a\,(bc) \tag{2}$$

pro libovolné komplexy a, b, c.

Z této plyne vzhledem k větě $ab = ba$:

$$(ba)\,c = a\,(bc) = a\,(cb)$$

atd., takže napíšeme-li kteroukoli přestavu liter abc, na př. cab, a spojíme-li kterékoli dvě sousední litery závorkou, na př. $(ca)\,b$, obdržíme komplex, jehož hodnota rovná se $(ab)\,c$. Dokažme to v našem případě, užívajíce vět (1) a (2): Dle (2) máme $(ca)\,b = c\,(ab)$ a dle (1) bude tento výraz $= (ab)\,c$, jak tvrzeno.

Společnou hodnotu těchto výrazů znamenejme kterýmkoli ze spůsobů: abc, bac, cba ...

Uvažujme nyní čtyři komplexy a, b, c, d; pak bude dle (2)

$$(abc)\,d \equiv [(ab)\,c]\,d = (ab)\,.\,(cd) = a\,[b\,(cd)] = a\,(bcd) = \ldots$$

Volme na př. $(ca)\,(bd)$. Tento výraz můžeme psáti též $[(ca)\,b]\,d = (abc)\,d$; to lze dokázati o všech přestavách liter a, b, c, d při libovolném rozkladu v závorky.

Tyto vlastnosti výrazů ab, $(ab)\,c$, ... jsou zcela podobny vlastnostem součinů $\alpha\beta$, $(\alpha\beta)\,\gamma$, ... My z té příčiny nazveme operaci ab *komposicí* či *skládáním* komplexů a, b; výraz ab sluje pak *součinem*, a, b *činiteli* při této komposici, a výsledky nalezené dají se takto vysloviti: *Při komposici dvou, tří, čtyř ... komplexů jest hodnota součinu nezávislá na pořádku činitelů.* Tak bude na př. pro pět činitelů $(ab)\,(cde) = (abc)\,(de) = abcde$.

3. Existuje jediný komplex j, který má povahu jednotky násobící, t. j. dobře vyjádřeno, který nemá vliv na hodnotu součinu, takže pro všecky komplexy a

$$aj = a.$$

Položíme-li totiž $a = (\alpha, \alpha')$, $j = (\iota, \iota')$, bude rovnice $aj = a$ zníti

$$(\alpha\iota - \alpha'\iota', \ \alpha\iota' + \alpha'\iota) = (\alpha, \alpha'),$$

t. j.

$$\begin{aligned} \alpha\iota - \alpha'\iota' &= \alpha \\ \alpha\iota' - \alpha'\iota &= \alpha' \end{aligned}$$

při všech α, α'. Rovnice

$$\begin{aligned} \alpha\,(\iota - 1) - \alpha'\iota' &= 0, \\ \alpha\iota' - \alpha'\,(\iota - 1) &= 0 \end{aligned}$$

mají obstáti při všech hodnotách α, α'; to vyžaduje, aby $\iota - 1 = 0$, $\iota' = 0$, takže bude

$$j = (1, 0)$$

jediným komplexem hovícím naší podmínce.

Tento komplex nazývati budeme jednotkovým.

Zaveďme mimo j ještě komplex $i = (0, 1)$.

Značí-li μ libovolnou veličinu, pišme

$$(\mu\alpha, \mu\alpha') = \mu\,(\alpha, \alpha') = \mu a.$$

Pak plyne přímo z výměru komposice vztah

$$(\mu a)\,(\nu b) = \mu\nu\,.\,ab$$

a dále

$$\begin{aligned} \mu a + \nu a &= (\mu + \nu)\,a, \\ \mu a + \mu b &= \mu\,(a + b). \end{aligned}$$

Při tomto označení pak bude

(3) $$(\alpha, \alpha') = \alpha j + \alpha' i,$$

neboť pravá strana zní

$$\alpha\,(1, 0) + \alpha'\,(0, 1) = (\alpha, 0) + (0, \alpha') = (\alpha, \alpha').$$

Vzorec (3) lze slovy takto vyjádřiti:

Každý komplex lze vyjádřiti linearně pomocí dvou základních komplexů:

$$j = (1, 0),\ i = (0, 1).$$

4. Komposice má další základní vlastnosť násobení:

(4) $$(a + b)\,c = ac + bc.$$

Levá strana je totiž

$$(\alpha + \beta,\ \alpha' + \beta')\,(\gamma, \gamma')$$
$$= (\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha'\gamma' - \beta'\gamma',\ \alpha\gamma' + \beta\gamma' + \alpha'\gamma + \beta'\gamma)$$
$$= (\alpha\gamma - \alpha'\gamma',\ \alpha\gamma' + \alpha'\gamma) + (\beta\gamma - \beta'\gamma',\ \beta\gamma' + \beta'\gamma)$$

a poslední výraz jest identicky $ac + bc$.

Z toho plyne pak obyčejným způsobem

$$(a + b)\,(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Součin (komposiční) dvou, tří, čtyř ... stejných činitelů a znamenáme a^2, a^3, a^4 ..., takže máme

$$(\alpha, \alpha')^2 = (\alpha^2 - \alpha'^2,\ 2\alpha\alpha')$$
$$(\alpha, \alpha')^3 = (\alpha^3 - 3\alpha\alpha'^2,\ 3\bar{\alpha}^2\alpha' - \alpha'^3) \text{ atd.}$$

Zvláště bude $j^2 = j$, a obecně $j^n = j$, kdežto

$$i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -j.$$

Ve vzorcích $i^2 = -j$, $j^2 = j$ *jsou obsaženy všecky komposiční zákony komplexův.* Neboť dle předešlé věty bude

$$(\alpha, \alpha')\,(\beta, \beta') = (\alpha j + \alpha' i)\,(\beta j + \beta' i)$$
$$= \alpha\beta j^2 + \alpha'\beta' i^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\,ij$$
$$= (\alpha\beta - \alpha'\beta')\,j + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\,i$$
$$= (\alpha\beta - \alpha'\beta',\ \alpha\beta' + \alpha'\beta),$$

což právě jest výměrem komposice. (Dokončení.)

Úlohy.

Řešení úlohy 13.

(Zaslal p. *Karel Rosa,* stud. VII. tř. g. městské střední školy na Malé Straně v Praze.)

Položme $a + b = x$, $b + c = y$, $c + a = z$, potom výraz daný bude