Bohuslav Hostinský

# O transformaci diferenciálních výrazů

*Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, Vol. 56 (1927), No. 1, 7--13

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108876

# O transformaci diferenciálních výrazů.[1]

Napsal *Bohuslav Hostinský*.

**1.** Označme písmeny $x_1$ a $x_2$ křivočaré souřadnice bodu na dané ploše; pohybuje-li se ten bod podél křivky, jež probíhá na ploše, jsou $x_1$ a $x_2$ funkcemi parametru $t$ a diferenciál $ds$ oblouku vyjádří se známým vzorcem

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a_{11}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + a_{22}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2. \tag{1}$$

Koeficienty $a_{ik}$ jsou funkcemi souřadnic $x_1$ a $x_2$. Násobíme-li pravou stranu rovnice (1) druhou mocninou diferenciálu $dt$, obdržíme to, co se obyčejně nazývá kvadratickou diferenciální formou $ds^2$; v dalším budeme však počítati stále s derivacemi souřadnic $x_1$ a $x_2$ podle parametru $t$ a zachováme návev „kvadratická diferenciální forma“ pro pravou stranu rovnice (1), čímž se ovšem něco málo odchýlíme od obvyklé terminologie.

Zaveďme nyní nové proměnné $y_1$ a $y_2$ rovnicemi

$$x_1 = x_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = x_2(y_1, y_2) \tag{2}$$

Představme si, že nějaký výraz (na př. křivost plochy) závisí na veličinách $a_{ik}$ a na jejich derivacích podle souřadnic $x_1$ a $x_2$. Jak se změní takový výraz transformací (2)? Z četných úloh, které od doby, kdy Gauss zavedl do teorie ploch křivočaré souřadnice (Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1828), byly v nauce o transformaci diferenciálních výrazů probírány, připomínám tyto dva jednoduché příklady:

*a*) Derivujeme-li rovnice (2) podle parametru $t$, obdržíme

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_{11}\frac{dy_1}{dt} + u_{12}\frac{dy_2}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} &= u_{21}\frac{dy_1}{dt} + u_{12}\frac{dy_2}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \tag{3}$$

[1]) Hlavní výsledky této práce byly obsahem přednášky, kterou jsem měl dne 21. ledna 1926 ve schůzi Brněnského odboru Jednoty čsl. matematiků a fysiků.

kde klademe pro stručnost

$$u_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial y_k}, \quad (i, k = 1, 2).$$

Dosaďme do pravé strany vzorců (3) na místo $\frac{dx_1}{dt}$ a na místo $\frac{dx_2}{dt}$ do vzorce (1). Vychází

$$\sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2} a_{rs}\frac{dx_r}{dt}\frac{dx_s}{dt} = \sum_{r=1}^{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} a_{rs} u_{ri} u_{sk}\frac{dy_i}{dt}\frac{dy_k}{dt},$$

kteroužto rovnici lze psáti též takto:

$$\sum_r\sum_s a_{rs}\frac{dx_r}{dt}\frac{dx_s}{dt} = \sum_r\sum_s b_{ik}\frac{dy_i}{dt}\frac{dy_k}{dt}, \tag{4}$$

zavedeme-li označení

$$b_{ki} = b_{ik} = \sum_r\sum_s a_{rs} u_{ri} u_{sk}. \tag{5}$$

V rovnicích (4), (5) jakož i ve všech dalších jsou vynechány sumační meze; rozumí se, že podle každého sumačního indexu sečítá se od 1 do 2.

Původní kvadratická diferenciální forma, která stojí na levé straně rovnice (4), přechází tedy transformací (2) ve formu s koeficienty $b_{ik}$, které jsou definovány vzorci (5).

*b*) Budiž

$$\begin{Bmatrix} r s \\ i \end{Bmatrix}_a$$

t. zv. Christoffelův symbol, výraz to utvořený určitým způsobem z koeficientů $a_{ik}$ původní kvadratické diferenciální formy; definice symbolu bude uvedena později. Budiž dále $U(x_1, x_2)$ libovolná funkce proměnných $x_1$ a $x_2$. Výraz

$$U_{rs} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_i \begin{Bmatrix} r s \\ i \end{Bmatrix}_a \frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{o}$$

nazývá se kovariantní derivací funkce $U$, poněvadž se transformuje právě tak jako $a_{rs}$. Přejde-li totiž funkce $U$ transformací (1) ve funkci $V$ nových proměnných, bude

$$U(x_1, x_2) = V(y_1, y_2);$$

označíme-li, jako dříve, písmeny $b_{ik}$ koeficienty transformované kvadratické diferenciální formy, znakem

$$\begin{Bmatrix} r s \\ i \end{Bmatrix}_b$$

Christoffelův symbol utvořený pro transformovanou formu a píšeme-li

$$V_{rs} = \frac{\partial^2 V}{\partial y_r \, \partial y_s} - \sum_i \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}_b \frac{\partial V}{\partial y_i}, \tag{6'}$$

lze dokázati, že

$$V_{ik} = \sum_r \sum_s U_{rs} u_{ri} u_{sk}. \tag{7}$$

Souvislost mezi veličinami $U_{rs}$ a $V_{ik}$, vyjádřená rovnicí (7) je tedy zrovna taková jako souvislost mezi $a_{rs}$ a $b_{ik}$ vyjádřená rovnicí (5).

**2.** Nauka o transformaci výrazů, které se vztahují k dané kvadratické diferenciální formě, založená Gaussem, byla později pěstována hlavně Riemannem a Christoffelem. V novější době zdokonalili ji Ricci a Levi-Civita[2]) a nazvali ji „absolutním diferenciálním počtem". Zájem o ni stoupl zejména, když Einstein ve své nauce o všeobecné relativitě použil absolutního diferenciálního počtu (pro čtyři nezávislé proměnné).

Vzorec (1), kterým se podle Gausse vyjadřuje element $ds$ oblouku, byl později podle vzoru Riemannova a jeho pokračovatelů rozmanitě zobecňován, ale vždy tak, že v úvahách absolutního diferenciálního počtu pracuje se s kvadratickou diferenciální formou. Se stanoviska ryze matematického naskytuje se přirozeně tato otázka: Jsou rozmanité transformační vzorce absolutního diferenciálního počtu — jako na př. vzorce (5) — omezeny jen na ten případ, že běží o transformaci kvadratických forem, nebo je možno dáti jim obecnější význam? Když jsem četl rozmanité práce o transformaci kvadratických diferenciálních forem, shledal jsem, že všechny výpočty zakládají se především na vzorci (5), kterým se definuje přeměna koeficientů $a_{ik}$ v koeficienty $b_{ik}$. Soustava čísel $a_{ik}$ (čili „tensor", jak se nyní často říká) transformuje se určitým způsobem; z toho pak plynou všechny další důsledky. Celý absolutní diferenciální počet dá se pojímati z obecnějšího hlediska a sice takto:

Budiž

$$F\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right)$$

libovolná funkce veličin $x_1$ a $x_2$, které považujeme za funkce pomocného parametru $t$, a jejich derivací podle $t$. Zavedeme-li nové proměnné $y_1$ a $y_2$ rovnicemi (2), obdržíme

$$F\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right) = G\left(y_1, y_2, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}\right).$$

[2]) G. Ricci—T. Levi-Civita: Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications (Mathem. Annalen, Bd. 54, 1901, p. 125—201). — Obšírnější díla: H. Galbrun: Introduction à la théorie de la relativité (Paris, 1923). T. Levi-Civita: Lezioni di calcolo differenziale assoluto (Roma 1925).

Poněvadž

$$\frac{\partial G}{\partial \frac{dy_i}{dt}} = \sum_r \frac{\partial F}{\partial \frac{dx_r}{dt}} \cdot \frac{\partial \frac{dx_r}{dt}}{\partial \frac{dy_i}{dt}},$$

a dále, užijeme-li znaků $u_{ri}$ dříve definovaných,

$$\frac{dx_r}{dt} = \sum_i u_{ri} \frac{dy_i}{dt}, \quad \frac{\partial \frac{dx^r}{dt}}{\partial \frac{dy}{dt}} = u_{ri},$$

bude

$$\frac{\partial G}{\partial \frac{dy_i}{dt}} = \sum_r \frac{\partial F}{\partial \frac{dx_r}{dt}} \cdot u_{ri}.$$

Derivujeme-li tuto rovnici podle $\frac{dy_k}{dt}$, vychází

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \frac{dy_i}{dt} \frac{dy_k}{dt}} = \sum_r \sum_s \frac{\partial^2 F}{\partial \frac{dx_r}{dt} \partial \frac{dx_s}{dt}} \cdot u_{ri} u_{sk}. \tag{8}$$

Srovnejme vzorec (8) a (5); dostáváme větu: *Budiž $F$ libovolná funkce veličin $x_1$, $x_2$ a jejich prvních derivací podle parametru $t$. Zavedeme-li nové proměnné $y_1$, $y_2$ rovnicemi (2), transformuje se soustava veličin*

$$a_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial \frac{dx_i}{dt} \partial \frac{dx_k}{dt}} \quad (i, k = 1, 2) \tag{9}$$

*právě tak, jako soustava koeficientů $a_{ik}$ kvadratické diferenciální formy.*

Levou stranu rovnice (8) označíme písmenem $b_{ik}$; rovnice (8) stává se pak totožnou s rovnicí (5). Ve specielním případě, kdy funce $F$ je totožná s polovinou kvadratické formy (1), jsou veličiny $a_{ik}$ totožny s koeficienty této formy a $b_{ik}$ jsou totožny s koeficienty formy transformované.

**3.** Vzorce pro invarianty a kovarianty kvadratických diferenciálních forem dají se na základě uvedené věty zosobniti tak, že platí pro funkce $F$, které jsou závisly jakýmkoli způsobem na veličinách $x_1$, $x_2$ a na jejich derivacích $\frac{dx_1}{dt}$ a $\frac{dx_2}{dt}$. Budiž $P\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, a_{ik}, \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right)$ k o v a r i a n t  d i f e r e n c i á l n í  f o r m y $F$ o koeficientech $a_{ik}$;

výraz $P$ obsahuje jednak derivace prvého řádu funkce $U(x_1, x_2)$, jednak koeficienty $a_{ik}$ a jejich derivace. Kovariance je vyjádřena rovnicí

$$P\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, a_{ik}, \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right) = P\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}, b_{ik}, \frac{\partial b_{ik}}{\partial y_l}\right),$$

kde značí $V$ funkci, jež vzniká z $U$ transformací (1), a $b_{ik}$ jsou koeficienty transformované diferenciální formy.

Každý kovariantní výraz $P$ zůstává kovariantním, nahradíme-li kvadratickou diferenciální formu funkcí $F$, která závisí na $x_1, x_2$, i na jejich derivacích podle $t$ zcela libovolným způsobem; ovšem třeba současně zavésti na místo veličin $a_{ik}$ nebo $b_{ik}$ derivace druhého řádu funkce $F$ definované vzorcem (9) nebo derivace transformované funkce $G$, jež jsou definovány levou stranou rovnice (8).

Postupem, který se vykládá v teorii ploch[3]) odvodíme tyto výsledky (písmeny $a_{ik}$ a $b_{ik}$ značíme vždy druhé derivace funkcí $F$ a $G$, jak právě bylo vyloženo) platné pro zcela libovolnou volbu funkce $F$.

Determinant veličin $a_{ik}$ transformujeme podle rovnice

$$\begin{vmatrix} b_{11}, b_{12} \\ b_{12}, b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{12}, a_{22} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} u_{11}, u_{12} \\ u_{21}, u_{22} \end{vmatrix}^2,$$

což plyne přímo z formulí (5) podle pravidla o násobení determinantů.

Jsou-li $U(x_1, x_2)$ a $U'(x_1, x_2)$ dvě libovolné funkce proměnných $x_1$ a $x_2$, jest výraz

$$\frac{1}{a_{11}a_{22} - a^2_{12}}\left[a_{22}\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial U'}{\partial x_1} - a_{12}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial U'}{\partial x_2} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial U'}{\partial x_1}\right) + \right.$$
$$\left. + a_{11}\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial U'}{\partial x_2}\right]$$

kovariantní vůči libovolné transformaci (1).

Zavedeme-li Christoffelovy symboly (zobecněné pro libovolnou funkci $F$) rovnicemi

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right),$$

$$\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}_a = \sum_l A_{rl}\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix},$$

kde $A_{rl}$ jest minor příslušný prvku $a_{rl}$ v determinantu $\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{12}, a_{22} \end{vmatrix}$,

[3]) Viz díla svrchu uvedená nebo knihu Bianchi-Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie 2. Aufl. (Leipzig, 1910), § 23.

dělený hodnotou determinantu samého, a značíme-li obdobně (s indexem $b$) Christoffelovy symboly utvořené pro funkci transformovanou $G$, shledáme,[4]) že pro kovariantní derivace (6) a (6') platí zase transformační relace (7). Z toho plyne kovariance druhého diferenciálního parametru

$$\sum_i \sum_k A_{ik} U_{ik} \text{ atd.}$$

4. Nalezené výsledky platí zcela obecně pro jakýkoliv počet nezávisle proměnných veličin. Budiž

$$F\left(x_1, x_2, \ldots x_n; \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots \frac{dx_n}{dt}\right)$$

libovolná funkce $n$ proměnných $x_i$ a jejich prvních derivací podle pomocného parametru $t$ a označme symbolem $a_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ její parciální derivace druhého řádu podle $\frac{dx_1}{dt}$ a $\frac{dx_2}{dt}$ jako dříve; viz vzorec (9). Každá formule nebo rovnice absolutního diferenciálního počtu kovariantní s danou kvadratickou diferenciální formou, jejíž koeficienty $a_{ik}$ jsou dány jakožto funkce proměnných $x_i$, přejde ve formuli nebo v rovnici kovariantní s funkcí $F$, nahradíme-li koeficienty $a_{ik}$ druhými derivacemi funkce $F$ podle vzorce (9). Kovariant takto utvořený bude obecně záviseti nejen na proměnných $x_i$, nýbrž také na derivacích $\frac{dx_i}{dt}$, i když původní kovariant (utvořený pro kvadratickou diferenciální formu) derivací neobsahoval.

*

## Sur la transformation des expressions différentielles.

(Extrait de l'article précédent.)

Soit $F$ une fonction donnée de deux variables $x_1$, $x_2$ et de leurs dérivées $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$ prises par rapport à un paramètre auxiliaire $t$ et désignons par $a_{ik}$ les dérivées partielles du second ordre de $F$ prises par rapport à ces dérivées (voir la formule (9)). Par le changement de variables défini au moyen de formules (2) et (3), $F$ devient égale à une fonction $G$ de $y_1$, $y_2$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dy_2}{dt}$; soient $b_{ik}$ les dérivées du deuxième ordre de $G$ prises par rapport à $\frac{dy_i}{dt}$ et $\frac{dy_k}{dt}$. Les relations qui existent entre les quantités $a_{ik}$ et $b_{ik}$ sont

[4]) Viz Bianchi-Lukat l. c. § 26.

exprimées par la formule (5). Il en résulte que les expressions du calcul différentiel absolu, covariantes avec une forme quadratique différentielle à coefficients $a_{ik}$, deviennent des expressions covariantes avec la fonction $F$ à condition de remplacer les coefficients de la forme quadratique différentielle par les dérivées du second ordre de $F$ suivant la formule (9).