

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Příspěvky k teorii některých transcendent počtu integrálního. [VI.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 4-5, 209--214

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/108885>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1920

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Píše **M. Lerch.**

(Pokračování.)

10.

V základní identitě, která slouží k zavedení Bernoulliových čísel

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \dots$$

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{(-1)^{\nu-1} B_\nu}{(2\nu)!} x^{2\nu-1} +$$

$$+ (-1)^{p-1} \Theta \frac{B_p x^{2p-1}}{(2p)!},$$

kde při reálném x je $0 < \Theta < 1$, násobme obě strany $e^{ux} dx$ a integrujme od $x=0$ do $x=v$:

$$(a) \quad \int_0^v e^{ux} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) dx - \frac{e^{uv} - 1}{2u} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{(-1)^\nu B_\nu}{(2\nu)!} \int_0^v e^{ux} x^{2\nu-1} dx + R_p,$$

kde zbytek R_p má hodnotu

$$R_p = (-1)^p \frac{B_p}{(2p)!} \int_0^v \Theta x^{2p-1} e^{ux} dx = (-1)^p \frac{\Theta B_p}{(2p)!} \int_0^v e^{ux} x^{2p-1} dx,$$

$$0 < \Theta < 1.$$

Při označení

$$\mathfrak{A}_n(\omega) = \int_0^1 e^{\omega x} x^n dx, \quad \mathfrak{A}_0(\omega) = \frac{e^\omega - 1}{\omega} \quad (34)$$

máme

$$\int_0^v e^{ux} x^{2\nu-1} dx = v^{2\nu} \mathfrak{A}_{2\nu-1}(uv),$$

i můžeme pravou stranu rovnice (α) přehledně psát

$$S_p + R_p,$$

kde

$$\left. \begin{aligned} S_p &= \frac{v}{2} \mathfrak{A}_0(uv) + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \frac{B_i v^{2i}}{(2i)!} \mathfrak{A}_{2i-1}(uv), \\ R_p &= (-1)^p \frac{\vartheta B_p v^{2p}}{(2p)!} \mathfrak{A}_{2p-1}(uv), \quad 0 < \vartheta < 1. \end{aligned} \right\} \quad (35^a)$$

Levá strana rovnice (α) jeví se jako rozdíl integrálů I—II,

$$I = \int_0^v \frac{e^{ux} - 1}{x} dx, \quad II = \int_0^v \left(\frac{e^{ux}}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) dx;$$

první z nich má hodnotu

$$I = \mathfrak{S}i(uv),$$

značíme-li obecně

$$\mathfrak{S}i(\omega) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\omega^\nu}{\nu! \nu}, \quad (36)$$

takže logarithmointegrál $li(e^\omega)$ má hodnotu

$$\log |\omega| + E + \mathfrak{S}i(\omega).$$

Druhý integrál přetvoříme na součet

$$II = \int_0^v \frac{e^{ux} - e^x}{e^x - 1} dx + \int_0^v \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) dx;$$

druhý člen má hodnotu

$$\log \frac{e^v - 1}{v},$$

a v prvním integrálu píšme $e^x = \zeta$; obdržíme tak výsledek

$$\mathfrak{S}i(uv) - \int_1^{e^v} \frac{\zeta^{u-1} - 1}{\zeta - 1} d\zeta = \log \frac{e^v - 1}{v} + S_p + R_p. \quad (35^b)$$

Pro nekonečně rostoucí p přechází S_p v řadu, která konverguje pro $|v| < 2\pi$, a při tom $\lim R_p = 0$.

Vlastní nerv výsledku spočívá ve vyjádření binomického integrálu

$$\Phi(c, u) = \int_1^c \frac{x^{u-1} - 1}{x-1} dx \quad (37)$$

integrálním logaritmem a řadou S_p , slouží však též k výpočtu logaritmointegrálu, zvolíme-li na př. u celistvým. V tom případě, kdy u je celistvé a kladné, máme očividně

$$\Phi(c, u) = \sum_{r=1}^{u-1} \frac{1}{r} (c^r - 1).$$

Užijeme-li elementárního vztahu

$$\sum_{r=1}^{u-1} \frac{1}{r} - E = \psi(u), \quad \psi(u) = \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)},$$

přepíše se (35^b) na

$$li(e^{uv}) = \sum_{r=1}^{u-1} \frac{1}{r} e^{rv} - \psi(u) + \log |uv| + \log \frac{e^v - 1}{v} + S_p + R_p. \quad (35^c)$$

Rovnice (35^b) platí pro u, v libovolných znamének, v poslední rovnici se celistvé číslo u předpokládá kladné. Znamenitě se hodí k výpočtu logaritmointegrálů obou typů tento vzorec pro v blízka ± 1 , pokud $\omega = uv$ nemá příliš velkou hodnotu; pro velká ω máme v řadě značný počet velkých členů.

Podle (35^b) se výraz

$$\Phi(e^v, u) + \log \frac{e^v - 1}{v} + \frac{v}{2} \mathfrak{A}_0(uv)$$

nezmění, obrátí-li se současně znamení při u a v ; tím vychází vztah

$$\Phi(c, u) - \Phi\left(\frac{1}{c}, -u\right) + \log c + \frac{c^u - 1}{u} = 0. \quad (37^a)$$

Pro počítání hodnot \mathfrak{A}_n máme vedle (34)

$$\mathfrak{A}_n(\omega) = D_\omega^n \frac{e^\omega - 1}{\omega} = (-1)^{n-1} \frac{n!}{\omega^{n+1}} e^\omega \left[e^{-\omega} - \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{\omega^r}{r!} \right] \quad (34^a)$$

a vzorec návratný

$$\mathfrak{A}_n = \frac{e^\omega - \mathfrak{A}_{n-1}}{\omega}; \quad (34^b)$$

pro sblížené ocenění chyb hodí se též

$$\mathfrak{A}_n(\omega) = e^\omega \left[\frac{1}{n+1} - \frac{\omega}{(n+1)(n+2)} + \frac{\omega^2}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots \right].$$

Připojme číselné hodnoty pro $\omega = 10$:

$$\begin{aligned} e^{10} &= 22026.47, & \mathfrak{A}_0 &= 2202.547, & \mathfrak{A}_1 &= 2202.392, \\ \mathfrak{A}_2 &= 1762.169, & \mathfrak{A}_3 &= 1673.996, & \mathfrak{A}_4 &= 1533.049, \\ \mathfrak{A}_5 &= 1436.122, & \mathfrak{A}_6 &= 1340.974, & \mathfrak{A}_7 &= 1263.965. \end{aligned}$$

Velikost součinitelů \mathfrak{A}_{2r-1} v součtu S_p vyvažuje se malým obnosem činitelů

$$\frac{B_r}{(2r)!};$$

tak je zde ($\omega = 10$)

$$\frac{B_5}{10!} \mathfrak{A}_9 < 0.05.$$

Funkce (37) $\Phi(c, u)$ hová dále rovnici

$$\Phi(u+1) = \Phi(u) + \frac{c^u - 1}{u}. \quad (37^b)$$

Přeměnou c za $\frac{1}{c}$ a u za $-u$ máme tedy

$$\Phi\left(\frac{1}{c}, 1-u\right) = \Phi\left(\frac{1}{c}, -u\right) - \frac{c^u - 1}{u},$$

načež vztah (37^a) přejde na

$$\Phi(c, u) - \Phi\left(\frac{1}{c}, 1-u\right) = -\log c. \quad (37^c)$$

Funkce

$$F(c, u) = \int_0^1 \frac{1-x^{u-1}}{1-x} dx = \Phi(c, u) + \psi(u) - \psi(1) \quad (38)$$

tedy hová rovnicím

$$\left. \begin{aligned} F(c, u+1) &= F(c, u) + \frac{c^u}{u}, \\ F(c, u) - F\left(\frac{1}{c}, 1-u\right) &= -\log c - \pi \cotg \pi u. \end{aligned} \right\} (38^a)$$

Pro $0 < c < 1$ platí očividně rozvoj

$$F(c, u) = -\log(1-c) - \sum_{v=0}^{\infty} \frac{c^{u+v}}{u+v}, \quad (38b)$$

hterý nás vede k útvarům výše studovaným.

Pro $c > 1$ obdržíme pomocí druhé rovnice (38a) a (38b):

$$F(c, u) = -\log(c-1) - \pi \cotg u\pi + \sum_1 \frac{c^{u-v}}{u-v},$$

a odtud dle (38) — ježto $\psi(1) = -E$ —

$$E + \Phi(c, u) = -\log(c-1) - \psi(1-u) + \sum_1 \frac{c^{u-v}}{u-v}, \quad c > 1.$$

Přetvoříme výraz \mathfrak{R}_n pro ryze pomyslné argumenty, kládouce

$$\mathfrak{R}_n(i\omega) = \mathfrak{C}_n(\omega) + i\mathfrak{D}_n(\omega); \quad (39)$$

rovnice (34a) dává

$$\mathfrak{C}_n + i\mathfrak{D}_n = i^{n+1} n! \left\{ \frac{1}{\omega^{n+1}} - \frac{\cos \omega + i \sin \omega}{\omega^{n+1}} \sum_{\alpha=0}^n (-1)^\alpha \frac{\omega^\alpha}{\alpha!} \right\}.$$

Znamenejme P_n ryze lomenou část řady

$$(-1)^n \frac{n!}{\omega^{n+1}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{4!} - \frac{\omega^6}{6!} + \dots \right),$$

a Q_n ryze lomenou část řady

$$(-1)^{n-1} \frac{n!}{\omega^{n+1}} \left(\omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \frac{\omega^7}{7!} + \dots \right);$$

pak zní poslední rovnice

$$\mathfrak{C}_n + i\mathfrak{D}_n = i^{n+1} \left\{ \frac{n!}{\omega^{n+1}} - (\cos \omega + i \sin \omega) (-1)^n (P_n + iQ_n) \right\},$$

z ní separací částí reálné a pomyslné plynou výrazy pro \mathfrak{C}_n a \mathfrak{D}_n .

Volme zvláště $n = 2m - 1$, tedy

$$\mathfrak{C}_{2m-1} = (-1)^m \left\{ \frac{(2m-1)!}{\omega^{2m}} + P_{2m-1} \cos \omega - Q_{m-1} \sin \omega \right\} \quad (39a)$$

$$\mathfrak{D}_{2m-1} = (-1)^m \left\{ P_{2m-1} \sin \omega + Q_{2m-1} \cos \omega \right\}.$$

Pro kladné $v (< 2\pi)$ a kladné celistvé $u = a$ nám rovnice (35c) dává

$$(\beta) \quad \text{li}(e^{av}) = \sum_{v=1}^{a-1} \frac{1}{v} e^{rv} - \psi(a) + \log(av) + \log \frac{e^v - 1}{v} + S_a,$$

$$S_\infty = \frac{e^{av} - 1}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{B_m v^{2m}}{(2m)!} \mathfrak{A}_{2m-1}(av);$$

definujeme-li pro komplexní $\omega = av$ funkci $li(e^\omega)$ jako prodloužení funkce z kladných hodnot ω do roviny ω opatřené řezem $(-\infty \dots 0)$ podél reálné osy, bude tento rozvoj platný také pro komplexní v , pokud $|v| < 2\pi$. Vložme tedy ryze pomyslnou hodnotu iv za v , předpokládajíc $0 < v < 2\pi$; je pak

$$li(e^{i\omega}) = Ci(\omega) + iSi(\omega) + \frac{i\pi}{2},$$

na pravé straně (β) máme

$$\log(a iv) = \log(av) + i \frac{\pi}{2}, \quad \log \frac{e^{iv} - 1}{iv} = \log \frac{2 \sin \frac{v}{2}}{v} + i \frac{v}{2}.$$

$$S_\infty(i\omega) = \frac{\cos \omega - 1}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m v^{2m}}{(2m)!} \mathfrak{C}_{2m-1}(\omega) + i \left\{ \frac{\sin \omega}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m v^{2m}}{(2m)!} \mathfrak{D}_{2m-1}(\omega) \right\},$$

a tedy nacházíme porovnáním částí reálné a pomyslné rozvoje, v nichž $\omega = av$, $0 < v < 2\pi$, a celistvé:

$$Ci(\omega) = \sum_{v=1}^{a-1} \frac{\cos vv}{v} - \psi(a) + \log a + \log \left(2 \sin \frac{v}{2} \right) + \frac{\cos \omega - 1}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m v^{2m}}{(2m)!} \mathfrak{C}_{2m-1}(\omega), \quad (40^a)$$

$$Si(\omega) = \sum_{v=1}^{a-1} \frac{\sin vv}{v} + \frac{v}{2} + \frac{\sin \omega}{2a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m v^{2m}}{(2m)!} \mathfrak{D}_{2m-1}(\omega). \quad (40^b)$$

Návratný vztah (34^b) podává rovnice

$$\omega \mathfrak{C}_n = \sin \omega - n \mathfrak{D}_{n-1}, \quad \omega \mathfrak{D}_n = -\cos \omega + n \mathfrak{C}_{n-1}, \quad (39^b)$$

z nichž vycházejí vztahy k počítání vhodnější

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \mathfrak{C}_n &= \omega \sin \omega + n \cos \omega - n(n-1) \mathfrak{C}_{n-2}, \\ \omega^2 \mathfrak{D}_n &= -\omega \cos \omega + n \sin \omega - n(n-1) \mathfrak{D}_{n-2} \end{aligned} \right\} \quad (39^*)$$

($n = 2, 3, 4, 5, \dots$)

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\cos \omega + \omega \sin \omega - 1}{\omega^2}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^2}.$$