Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Seifert

Poznámka o parabolické křivce plochy třetího stupně

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 1, 30--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108995

Poznámka o parabolické křivce plochy třetího stupně.

Napsal *L. Seifert.*

Parabolická křivka obecné plochy třetího stupně jest úplný průsek plochy s její Hesseovou plochou, jež je čtvrtého stupně. Jest to křivka dvanáctého stupně, jež každou z 27 přímek plochy má za dvojnou tečnu. V pojednání „Sur les surfaces du troisième ordre qui ont, aux points d'une courbe plane, un contact d'ordre deux avec une surface générale"[1]) odvodil jsem několik nových vlastností této křivky. Zde chci poukázati k tomu, že z těchto mých úvah plyne také velmi zajímavá vlastnost této křivky, na níž již Sturm upozornil, že totiž ona je současně také parabolickou křivkou na uvedené Hesseově ploše stupně čtvrtého[2]). Ovšem jest jen částečný průsek této plochy čtvrtého stupně s její Hesseovou plochou (stupně 8). Do úplného průseku je doplněn hranami Sylvestrova pětistěnu původní plochy kubické, neboť je známo, že podél nich má Hesseova plocha dotyk s druhou polárou protějšího vrcholu.

Buď $P = 0$ rovnice plochy třetího stupně (P), $u = 0$ rovnice roviny (u). Rovina má 8 pólů, t. j. osm bodů, ve kterých se sekou první poláry všech bodů roviny (u). Ve svazku ploch

$$P + \lambda u^3 = 0 \tag{1}$$

jest osm ploch s dvojným bodem; tyto dvojné body jsou právě póly roviny (u). Buď O jeden z nich. Jemu patří polární kuželosečka v (u), průsek jeho první a druhé poláry. Tato kuželosečka seče (P) v šesti bodech, dotyčných bodech hlavních tečen bodem O jdoucích. Těchto šest tečen jsou hlavní přímky (binární) plochy třetího stupně s dvojným bodem O.

Hledejme podmínky, pro něž tento dvojný bod přejde v biplanární B_3 neb B_4.

[1]) Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 107, r. 1929.

[2]) *Sturm,* Synthetische Untersuchungen über Fl. 3ter Ord. (str. 149), *Bauer,* Münch. Abh. 14 (1883), *Voss,* Math. Ann. 27 (1886).

Rovnici plochy třetího stupně (Q) s biplanárním bodem pišme

$$Q \equiv xyt + az^3 + (bx + cy)\,z^2 + (dx^2 + 2cxy + fy^2)\,z + gx^3 + \\ + 3hx^2y + 3kxy^2 + gy^3 = 0 \qquad (2)$$

Jeli $a \lesseqgtr 0$, máme B_3, pro $a = 0$ dostáváme B_4.

Rovnici obecné plochy, která má s ní podél rovinné křivky dotyk druhého stupně, lze bez újmy na obecnosti psáti ve tvaru

$$P \equiv Q + t^3 = o. \qquad (3)$$

Přímka OZ $(x = y = 0)$ seče plochu ve třech různých bodech při $a \lesseqgtr 0$, pro $a = 0$ jest však hlavní tečnou v bodě Z. Všimněme si, jak se v obou případech chová Hesseova plocha.

Pro první poláru bodu O vychází

$$xy + t^2 = 0;$$

jest to kužel, tedy O leží na H. ploše. Geometricky je to jasné, neboť pak první polára je kužel a polární kuželosečka jsou dvě přímky. Šest hlavních tečen bodu O plochy (Q) jest rozloženo po třech ve dvou rovinách a vzniká B_3. Rovnice H. plochy jest

$$\begin{vmatrix} 2dz+6gx+6hy, & t+2ez+6hx+6ky, & 2bz+2dx+2ey, & y \\ t+2ez+6hx+6ky, & 2fz+6kz+6gy, & 2cz+2ex+2fy, & x \\ 2bz+2dx+2ey, & 2cz+2ex+2fy, & 6az+2bx+2cy, & 0 \\ y, & x, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Hledáme-li v případě B_4 průseky hrany $x = y = o$ s H. plochou, dostáváme

$$t = o, \quad z^2 = o, \quad z(2bce - b^2f - c^2d) + bct = o.$$

Dotkne se tedy v O H. plochy, protíná ji v Z a ještě v dalším bodě R. Z je tedy současně na (P) a její H. ploše, t. j. na parabolické křivce plochy (P). Tečná rovina plochy (P) v bodě Z jest $bx + cy = o$; průsek její s plochou je křivka s bodem vratu Z a tečna vratu jest OZ. Tyto tečny vratu v bodech parabolické křivky vyplňují však rozvinutelnou plochu Σ stupně 30, která se H. plochy dotýká podél křivky γ stupně 18, na níž leží O a seče ji ještě v další křivce ϱ stupně 72; na ϱ leží R[3]).

Polární rovina (u) bodu O k (P) jest $t = o$. Hledejme její průsek s $H = o$. Po snadné úpravě dostaneme

$$(bx + cy)^2 + \ldots = 0; \qquad (5)$$

průsečná křivka má tedy bod vratu, Z je tedy také na parabolické křivce plochy $H = o$. *Polární roviny bodů křivky γ dotýkají se tedy H. plochy podél vlastní parabolické křivky společné s plochou (P).*

*

---

[3]) Viz pojednání sub[1]).

Remarque sur la courbe parabolique d'une surface cubique.

(Extrait de l'article précédent.)

Par un raisonnement analogue à celui que j'ai employé dans le Mémoire cité sous[1]), on peut démontrer de nouveau la propriété intéressante de la courbe parabolique que cette courbe est en même temps la courbe parabolique proprement dite de la surface hessienne. On sait que, jusqu'à présent, plusieurs traveaux cités sous[2]) ont été faits à ce sujet.

Dans le faisceau 1) de surfaces cubiques il en existe en général huit à un point double conique. Cherchons la condition pour que ce point double soit un B_3 ou bien un B_4.

On peut écrire l'équation de la surface cubique en un B_3 ou B_4 sous la forme 2), on a B_3 pour $a \neq 0$, B_4 pour $a = 0$, et l'équation d'une surface générale qui a avec la première un contact du second ordre le long d'une courbe plane, sous la forme 3). La hessienne de la surface considérée est $H = 0$ (l'équation 4).

Si O est un B_4, $x = y = O$ touche la hessienne au point O et elle a avec celle-ci encore deux points communs, c'est à dire Z (0, 0, 1, 0) et un autre point R. Z est sur la courbe parabolique, OZ est la tangente de rebroussement de la courbe située dans le plan tangent $bx + cy = 0$ à la surface cubique au point Z. Ces tangentes remplissent, comme on le sait, une surface développable d'ordre 30. Le plan polaire du point O est le plan $t = 0$ et on trouve facilement que l'intersection de ce plan avec la surface $H = 0$ est une courbe ayant un point de rebroussement (l'équation 5); cela signifie que Z est un point de la courbe parabolique de la surface H.