

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

Matyáš Lerch  
Drobné zprávy

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 4, 178--182

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/109032>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1886

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

aneb uijeme-li vzorce (18),

$$2a_2^{\frac{n}{2}} \cos n\varphi = (-1)^n \left[ a_1^n - \frac{n}{1} a_2 a_1^{n-2} + \frac{n}{2} (n-3) a_2^2 a_1^{n-4} - \dots \right];$$

dosadíme-li sem za  $a_1$  hodnotu ze vzorce (24) a zkrátíme-li co možná, zjednáme si konečně nový, velezajímavý vzorec \*)

$$\cos n\varphi = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} (n-k-1)_{k-1} 2^{n-k-1} \cos^{n-2k} \varphi, \quad (26)$$

kterýž vyjadřuje  $\cos$  multipla  $\varphi$  pomocí mocnin  $\cos \varphi$ .

Že v něm obsaženy jsou pro

$$\varphi = 0$$

vzorce předcházející, jde z původu jeho přímo na jevo. A že naopak vzorec (26) vyjádříti možná determinantem, též snadno se tu poznává; jestif

$$\cos n\varphi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 \cos \varphi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \varphi & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \cos \varphi & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (27)$$

## Drobné zprávy.

Napsal

M. Lerch, v Praze.\*\*)

### I. Pojem čísla irracionalního.

Mathematikové před *Bolzánem* nezabývali se přesnými důkazy základních vět arithmetiky. Základní kámen přesné definice čísla irracionalního položil hluboký ten myslitel v pojednání vydaném v Praze r. 1817. pod titulem „Ryze analytický důkaz poučky atd.“, jehož se dostalo čtenářstvu tohoto časopisu výtečným překladem p. prof. *Studničky* v ročníku XI. Bolzano

\*) Srovnej *Studnička* „O počtu diferencialním“, II. vyd. pag. 125.

\*\*\*) Tyto drobné zprávy majíci za účel seznámiti čtenáře s t. zv. naukou o soustavách bodů, odevzdal nám auktor v květru 1884. R.

považuje za veličinu vše, co lze číselně s předepsanou chybou vystihnouti, jak z §. 7. řečeného pojednání vyplývá (na str. 24. překl. „Předpokládáme-li však neproměnnou veličinu, kteráž má tuto vlastnost přibližovati se členům řady, nežádáme nic nemožného, což plyne z toho, že v případě tomto jest možná tuto veličinu určití tak přesně, jak jen líbo“.).

Dalšího rozvoje dostalo se tomuto pojmu pracemi *Weierstrassovými*; čtenář nalezne náčrtek jeho nauky z pera p. dra. *Krause* v XII. ročníku tohoto časopisu.

Poněvadž theorie *Weierstrassova* je velmi pracna a těžko přístupna, podal *G. Cantor* v Lipských Annalech r. 1871 (sv. V.) ve svém pojednání o řadách trigonometrických přeloženém do franciny v časopisu „*Acta Mathematica*“ (II. sv., p. 336) definici čísla irracionalního, která se s §. 7. řečeného pojednání *Bolzanova* nalezá v souvislosti velmi těsné. Můžeme-li podlé určitého zákona utvořiti neomezený počet \*) racionálních čísel  $a_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), která mají tu vlastnost, že pro každé dané sebe menší kladné racionální číslo  $\epsilon$  existuje číslo  $\nu$  takové, aby pro všechna kladná  $\mu$  bylo  $|a_{\nu+\mu} - a_\nu| < \epsilon$ , vyjádříme tuto vlastnost řady \*\*) (či posloupnosti) čísel  $a_\nu$  následovným výrokem: „Posloupnost  $a_\nu$  má určitou mez či limitu“. Pak zavedeme pojem rovnosti a chceme-li též, nazveme dle určitých známek tuto limitu větší neb menší, a označíme ji písmenem na př. *b*. Tyto limity nejsou tedy čísla v původním slova smyslu; my ale význam slova číslo rozšíříme a budeme také limity nazývati čísla. Tento pojem není nikterak ještě úplna stanoven, nýbrž význam jeho vyplyne teprve definicí všech elementarných operac, čímž se zabývati nebudeme.

Jinak vyjadřuje to *Heine* \*\*\*) v 74. sv. *Crelle-Borchardtova* žurnálu, zvoliv pro každou řadu určité znamení (*Zahlzeichen*), a tato znamení považoval za předmět operac.

Předpokládáme-li, že lze každou délku i sebe menší tak zmnohonásobiti, že převyší každou délku danou i sebe větší,

\*) T. j. tolik, kolik si kdo přeje.

\*\*) *Cantor* ji nazývá později „*Fundamentalreihe*“.

\*\*\*) *Heine* uveřejnil své pojednání před *Cantorem*, ale sám praví, že se dověděl základní pravdy ústním sdělením od tohoto.

a že lze každou délku rozdělit v libovolný počet rovných dílů (viz o tom násl. zprávu), můžeme každé racionální číslo znázornit, tj. vyjádřit poměrem jisté délky k jiné délce dané, kterou volíme za jednotku. Naopak lze každému bodu na přímce přiřadit buď číslo racionální, neb neomezenou posloupnost  $(a_n)$ , jejíž čísla mají určitou limitu.

*Nedá se však nikterak dokázat, že každé limitě náleží určitý bod (tj. určitá délka od pevného počátku). Každá limita dá se uvést na t. zv. nekonečný zlomek desetinný, tedy nekonečnou řadu \*) tvaru* 
$$0 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots$$

Důkaz, kdyby byl možným, záležel by v stanovení bodu, který má tu vlastnost, že jeho vzdálenost od racionálního bodu  $0 \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$  klesá s rostoucím  $p$  pod každou mez. P. Du Bois-Reymond praví o tom: „... ich behauptete, keine Denkarbeit werde einen solchen Beweis für das Dasein des Grenzpunktes je einem Gehirn abfoltern, und vereinigte es Newtons Divinationsgabe, Eulers Klarheit und die zermalmende Gewalt Gaussischen Geistes“ (d. allgem. Functionenth. p. 66).

Nic nám však nemůže zabránit, abychom *definovali* bod přímky daným zlomkem desetinným, bod to, jenž s přirozeným t. j. geometrickým bodem nemusí mít nic společného, než název, pojem vzdálenosti, rovnosti a t. d., které se dají ryze formálně vymezit. P. Cantor zavádí jakožto axiom\*\*), že takový bod existuje vždy skutečně.

Co týče se poměru definice Weierstrassovy a Cantorovy, uvádí poslední v XXI. sv. Lipských Annalů na str. 71. toto:

„Prvý způsob (t. j. Weierstrassův) nezdá se mi býti tak snadno schopným užívání, jedná-li se o přesnou definici součtů řad, které nekonvergují bezpodmínečně... Ano u samých řad konvergence bezpodmínečné je stanovení součtu, jakkoli neodvislého od pořádku členů, pouze při určitém seřazení skutečného provedení schopno...“

\*) Ve smyslu Weierstrasse, jejíž pojem možno na základě neomezené posloupnosti stanovit.

\*\*) Viz o tom násl. zprávu.

Třetí definice pochází od *Dedekinda* \*), jenž, jak sám praví, dlouho marně hledal, nač posléz šťastně dopadl. Neexistuje žádné číslo racionální, jehož dvojnásobek by se rovnala 3; můžeme však veškerá čísla racionální rozdělití ve dvě skupiny; čísla skupiny první mají čtverce menší a druhá větší než 3; každé racionální číslo náleží jedné z těchto skupin; toto rozdělení racionálních čísel nazveme *řezem* (Schnitt) a označíme je  $\sqrt{3}$ .

Patrně existují racionální čísla různých soustav, která jsou si blíže, než obnáší kterákoli daná veličina.

Takto si můžeme počínati obecně: Máme-li čísla racionální rozdělena ve dvě skupiny, znamenajíce čísla skupiny první  $\mathcal{A}_\nu$ , druhé  $\mathcal{B}_\mu$ , a je-li každé číslo  $\mathcal{A}_\nu$  menší než každé číslo  $\mathcal{B}_\mu$  a je-li možno pro každé kladné sebe menší  $\delta$  určití  $\mathcal{A}_\nu$ ,  $\mathcal{B}_\mu$  tak, aby  $\mathcal{B}_\mu - \mathcal{A}_\nu < \delta$ , nazveme toto rozdělení *řezem* čísel racionálních ( $\mathcal{A}_\nu | \mathcal{B}_\mu$ ), jemuž přiřadujeme „číslo“  $b$  (t. j. znamení) atd.

Celkem shledáváme, že definice Weierstrassova vychází od nekonečné řady, Bolzano-Cantorova od obecnějšího pojmu meze či limity, a Dedekindova od sevření v libovolné úzké meze. Prvá nalezla málo stoupců pro methodické obtíže, druhá nalezla v Německu téměř všeobecného rozšíření, třetí pak hlavně v Itálii nalezla horlivé stoupence, jak o tom svědčí znamenitý spis, který napsal p. *Ullise Dini* (Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, Pisa, 1878).

Konečně podotýkám, že pojem meze v geometrickém představení vzat opětně na přetřes p. *Du Bois-Reymondem* (Die allgemeine Functionentheorie), jenž předvádí representanty dvou protivných systémů, idealistu a empiristu, kteří o základních pojmech polemizují. Co se mne týče, nepodepsal bych se pod žádný z těchto dvou praporů, uznávaje mnohé principy oběma protivníky pronešené za pravé, a nikterak bych nepřipustil leckterý vývod idealistův a empiristův, ačkoli oběma za důsledný uznány.

## II. Axiom Archimédův.

Základní věty geometrie byly ode dávna předmětem úvah filosofických. Jsou-li buď elementy nějaké vědy přírodní povahy

\*) Vyložena v samostatném spisku: Stetigkeit und irrationale Zahlen Braunschweig, 1872.

jednoduché, aneb dosáhla-li zkušenost v oboru tom dostatečné výše, aby byla schopna formálního zpracování, jedná se především o principy či axiomy základní, z nichž možno užitím pouhé logiky, tedy způsobem čistě dialektickým ostatní zákony vyvoditi. Geometrie elementární ještě nedospěla tak daleko, aby veškerý její zákony známy byly v redukované, nejjednodušší formě, jak toho je *princip rovnoběžek* (nejvíce diskutovaný, ačkoli se takových nalezá v geometrii hojnost — viz na př. definici rovniny atd.) dostatečným dokladem.

Než co se *doposud* nepodařilo zúplna, mohlo se podařiti aspoň částečně, a tak se nám dostalo z pera znamenitého badatele p. prof. *Stolze* \*) v Insbrucku vysvětlení souvislosti, která vládne mezi základními pojmy *měření*. Největší obtíže jako všude působí pojem spojitosti (t. j. jeho formulování).

(Dokončent.)

## Úlohy.

### Řešení úlohy 7.

(Podal p. *Bohuslav Mašek*, stud. VII. tř. g. v Jindřišské ulici v Praze.)

Rovnice dané kružnice budiž

$$R \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

bod  $p$  měj souřadnice  $x = b$ ,  $y = 0$ . Rovnice tečny v bodě  $m(x, y)$  jest  $x\xi + y\eta - a^2 = 0$  a vzdálenost od bodu  $p$  jest

$$\frac{pq}{a} = \frac{bx - a^2}{a}.$$

Souřadnice bodu  $n(\xi, \eta)$  vyhovují podmínkám

$$\xi = x, \quad \frac{bx - a^2}{a} = \sqrt{(\xi - b)^2 + \eta^2},$$

z nichž vyloučením  $x$  plyne rovnice hledaného místa geometrického:

\*) Lipské Annaly, sv. XXII. str. 504.