Václav Havlíček

Rovinné průseče rotačních ploch druhého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 29 (1900), No. 1, 81--85

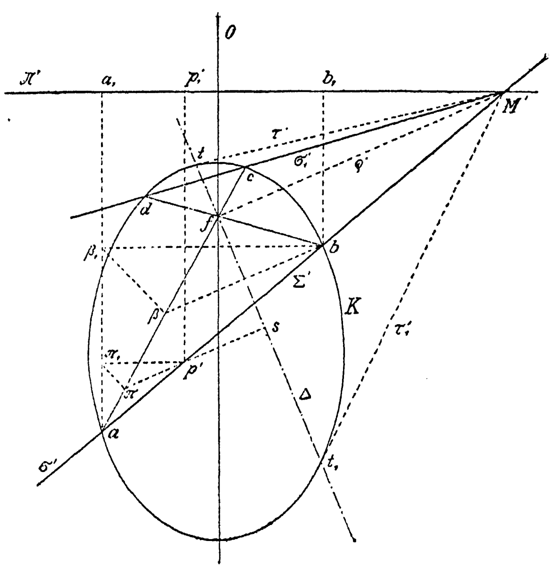
Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/109083`

Rovinné průseče rotačních ploch druhého stupně.

Napsal

Václav Havlíček v Praze.

Buď dána kuželosečka K (obr. 1), jejíž ohnisko jest f, řídící přímka π' a hlavní osa $O \perp \pi'$. Otočíme-li tuto kuželosečku K kol osy O, vytvoří rotační plochu P, o níž hodláme elementárně dokázati, že jest stupně druhého, čili, že každá rovina σ seče tuto plochu P v kuželosečce Σ; přímka π' vytvoří rovinu $\pi \perp$ O, jež jest rovinou řídící plochy P, a bod f ohniskem.



Obr. 1.

Poněvadž plocha jest rotační, nepozbude důkaz všeobecné platnosti, vezme-li se $\sigma \perp$ K a rovina křivky K za průmětnu, na níž průměty jednotlivých útvarů prostorových označeny jsou čárkami; průměty útvarů, ležících v rovině křivky K, označeny jsou bez čárek.

Rovina π promítá se v přímku π', rovina σ v přímku σ', v níž jest též průmět Σ' průsečné křivky Σ. Protíná-li přímka σ' kuželosečku K v bodech a, b, a vedeme-li dále $aa_1 \perp \pi'$, $bb_1 \perp \pi'$, jest, jak známo

$$\overline{af} = \varepsilon . \overline{aa_1}, \quad \overline{bf} = \varepsilon . \overline{bb_1},$$

kde ε značí numerickou výstřednost kuželosečky. Je-li dále $\overline{af} > \overline{bf}$, a přeneseme-li na přímku fa délku $\overline{fb} = \overline{f\beta}$ od bodu f směrem fa, a na přímku aa_1 délku $\overline{b_1 b} = \overline{a_1 \beta_1}$ od bodu a_1 směrem $a_1 a$, pak plyne, že

$$\overline{a\beta} = \overline{af} - \overline{\beta f} = \overline{af} - \overline{bf} = \varepsilon (\overline{aa_1} - \overline{bb_1}) = \varepsilon . \overline{a\beta_1},$$

tudíž

$$\overline{a\beta} : \overline{a\beta_1} = \overline{af} : \overline{aa_1}$$

a proto jest

$$\beta\beta_1 \parallel fa_1 .$$

Vytkněme nyní na křivce Σ libovolný bod p a veďme $pp_1 \perp \pi$; jsou-li p' a p'_1 průměty těchto dvou bodů, jest

$$\overline{pf} = \varepsilon . \overline{pp_1} = \varepsilon . \overline{p'p'_1} .$$

Vedeme-li $p'\pi_1 \,\#\, p'_1 a_1$, pak $\pi_1 \pi \parallel a_1 f$, a proto

$$\overline{pf} = \varepsilon . \overline{p'p'_1} = \varepsilon . \overline{\pi_1 a_1} = \overline{\pi f} .$$

Dokažme ještě, že $\pi p' \parallel \beta b$; to však vysvítá ihned z úměry

$$\overline{a\pi} : \overline{a\beta} = \overline{a\pi_1} : \overline{a\beta_1} = \overline{ap'} : \overline{ab} .$$

Vedeme-li ještě bodem f přímku $\Delta \perp \beta b$, a protíná-li tato přímka $\pi p'$ v bodě s, jest

$$\Delta pfs \cong \Delta \pi fs,$$

neboť

$$\sphericalangle psf = \sphericalangle \pi sf = \mathrm{R};$$

ze shodnosti této plyne, že

$$\sphericalangle pfs = \sphericalangle \pi fs = \text{konst.}$$

Opíšeme-li tedy plochu kuželovou Q, jejíž střed jest f a řídící křivka Σ, budou tvořiti veškeré povrchové přímky její s přímkou $\varDelta$ stálý úhel čili rovinná křivka Σ jest na rotační ploše kuželové; avšak rovinná průseč rotační plochy kuželové jest kuželosečkou, a proto i křivka Σ jest kuželosečkou a plocha P plochou stupně druhého. Tím zároveň dokázáno, že kuželosečka plochy P se promítá z ohniska rotační plochou kuželovou.

Budiž dále M průsečnicí rovin σ a π. M′ jest pak bod. Prodloužíme-li přímky $\overline{af}$, $\overline{bf}$, protínají tyto kuželosečku K ještě ve dvou bodech c, d tak, že spojnice cd prochází bodem M′, neboť ohnisko f jest polem řídící přímky π'; a poněvadž dále přímka $\varDelta$ půlí úhel afb, jest $\varDelta \perp f\mathrm{M}'$ čili přímka $\varDelta$ jest polárou bodu M′. Applikujeme-li nyní tyto vlastnosti na prostor, vidíme, že rotační plocha kuželová opsaná ze středu f nad kuželosečkou Σ seče plochu P ještě v jedné kuželosečce Σ_1 ($\Sigma'_1 \equiv cd$) tak, že její rovina σ_1 prochází přímkou M; touto přímkou M prochází též rovina ϱ jdoucí ohniskem f kolmo ku ose $\varDelta$. Protíná-li přímka $\varDelta$ plochu P v bodech t, t_1, prochází patrně též roviny tečné τ, τ_1, těmito body ku ploše P vedené, přímkou M. Je-li naopak v řídící rovině π rotační plochy P dána libovolná přímka M a touto vedeme svazek rovin sečných, promítají se všecky průsečné kuželosečky, takto na ploše P povstalé, z ohniska f rotačními plochami kuželovými, jež mají společnou rotační osu s — spojnici to dotyčných bodů t, t_1 obou tečných rovin τ, τ_1, přímkou M ku ploše P vedených. Protíná-li přímka M osu O plochy P, pak jest patrně $\varDelta \perp$ O.

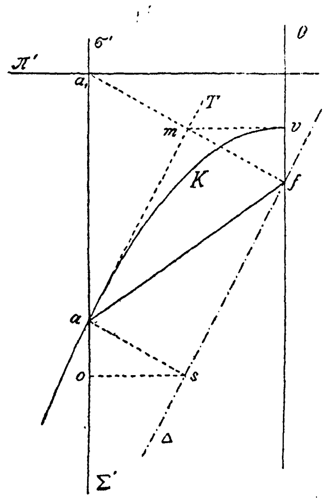
Známo jest, že geometrické místo středů rotačních ploch kuželových, procházejících danou kuželosečkou Σ, jest opět kuželosečka Σ_0, mající ohniska ve vrcholech křivky Σ, a sice tak, že Σ_0 jest hyperbolou, je-li Σ ellipsou a naopak; je-li Σ parabolou, jest též i Σ_0 parabolou. Dle toho určíme zde křivku Σ v pravé velikosti, učiníme-li $2e = \overline{af} \mp \overline{fb}$, kde e značí linearnou excentricitu ellipsy (hyperboly), jejíž osa hlavní jest $2a = \overline{ab}$; při parabole jsou parametry obou křivek stejny.

Zvláštního povšimnutí zasluhuje rotační paraboloid; vedeme-li rovinu σ ku ose O nakloněnou, pak jsou oba body a, b konečné a rovina σ seče promítající rotační plochu kuželovou v ellipse. Jsou-li $2a$, $2b$, e osy a výstřednost této ellipsy Σ, jest

$$2e = \overline{af} - \overline{fb} = \overline{aa_1} - \overline{bb_1} = \overline{a\beta_1},$$

tudíž

$$\overline{\beta_1 b} = \sqrt{4a^2 - 4e^2} = 2b.$$



Obr. 2.

Z toho plyne, že plocha válcová promítající ellipsu Σ ve směru osy O jest rotační, čili, že orthogonalní průmět ellipsy na rotačním paraboloidu do roviny kolmé ku ose plochy jest kružnice. Ostatně vysvítá to již z té okolnosti, že ellipsa se promítá z ohniska rotační plochou kuželovou, a poněvadž zde možno předpokládati jedno ohnisko v nekonečnu, přejde plocha kuželová ve válcovou.

Je-li ve zvláštním případě rovina $\sigma \parallel$ O (obr. 2.), pak bod b jest v nekonečnu a rotační plocha kuželová Q sečena rovinou σ, jež jest rovnoběžna s jednou její povrchovou přímkou, čili křivka Σ jest parabolou. O této křivce Σ se dá dokázat, že jest $\Sigma \cong$ K. Parabola K, jejíž ohnisko jest f, vrchol v a řídící přímka π', nechť se otočí kol své osy O; plochu tím povstalou sečme rovinou $\sigma \parallel$ O a při tom $\sigma \perp$ K. Přímka σ' seče parabolu v bodu a a řídící přímku v bodu a_1. Promítneme-li parabolu

Σ z ohniska f rotační plochou kuželovou Q, bude osa její Δ půliti úhel afO; poněvadž však tečna paraboly am v bodu A půlí úhel a_1af, jest $\Delta \parallel am$. Vepišme nyní do kužele Q kouli, jež se mimo obliny kužele dotýká i roviny σ. Hledaný střed s obdržíme, vedeme-li $as \perp \Delta$; a učiníme-li $so \perp \sigma'$, jest o bodem dotyčným roviny σ. Avšak jak známo, jest dotyčný bod ohniskem paraboly Σ a bod a vrcholem. Vedeme-li $fm \perp am$, jest pak $mv \perp$ O, a $\Delta aso \cong \Delta fmv$, tudíž $\overline{vf} = \overline{oa}$, a proto $\Sigma \cong$ K.

Úlohy.

Úloha 1.

Jak se dokáže správnost relace

$$\frac{\prod\limits_{k=o}^{n} (a^{2^k} + b^{2^k})(c^{2^k} + d^{2^k})}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}$$

$$+ \frac{\prod\limits_{k=o}^{n} (a^{2^k} + c^{2^k})(b^{2^k} + d^{2^k})}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)}$$

$$+ \frac{\prod\limits_{k=o}^{n} (a^{2^k} + d^{2^k})(b^{2^k} + c^{2^k})}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)} \equiv 0?$$

Prof. Dr. *F. J. Studnička.*

Úloha 2.

Řešiti jest rovnici

$$x^5 - 2x^4 - x^3 + 6x - 4 = 0.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 3.

Který jest součet nekonečné řady, jejíž obecný člen jest