Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.*)

Píše M. Lerch.

(Pokračování.)

I.

Hodláme podati některé vztahy z theorie funkce

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

a zavedeme označení

$$\varphi(x) = \psi(x) - \psi(1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+x} \right),$$

při čemž buď mimochodem poznamenáno, že $-\psi(1) = E = 0{\cdot}57721566\ldots$ jest Eulerova konstanta.

Na prvním místě uvažujme funkci jednoznačnou

$$f(x) = \varphi(x+a)\,\varphi(x+b) = f(x \mid a, b),$$

kde a, b jsou konstanty, jichž rozdíl není číslem celistvým; funkce ta má póly prvního stupně na místech

$$x = -a-n \quad \text{s residuem} \quad -\varphi(b-a-n),$$

$$\text{a } x = -b-n \quad \text{„} \quad -\varphi(a-b-n), \ (n = 0, 1, 2, 3\ldots),$$

takže funkce

$$G(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(b-a-n) \left(\frac{1}{x+a+n} - \frac{1}{a+n} \right)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a-b-n) \left(\frac{1}{x+b+n} - \frac{1}{b+n} \right)$$

je celistvá transcendenta.

Tu máme dále

$$f(x+1) - f(x) = \frac{\varphi(x+b)}{x+a} + \frac{\varphi(x+a)}{x+b} + \frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

a znamenáme-li řady na pravé straně výrazu $G(x)$ literami

---

*) Viz roč. XLVIII. a XLIX. — *Opravy* ku čl. 10 (str. 210—212, roč. XLIX): Str. 210 ř. 2 stůj $v^{2\nu}$ místo v^2, rovněž řádka 6. — Str. 211 ř. 3: spodní mez integrační má býti 1. Poslední řádek v pravo v čitateli má státi $n\mathfrak{A}_{n-1}$. — Na str. 212 ř. 12 má pravá strana zníti $0{\cdot}0^5 5$.

$S_a(x)$ a $S_b(x)$, máme

$$S_a(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(b-a-n)\left(\frac{1}{x+a+n+1} - \frac{1}{a+n+1}\right)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(b-a\quad n)\left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{a+n}\right)$$
$$= \sum_{0}^{\infty} \varphi(b-a-n-1)\left(\frac{1}{x+a+n+1} - \frac{1}{a+n+1}\right)$$
$$+ \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{b-a-n-1}\left(\frac{1}{x+a+n+1} - \frac{1}{a+n+1}\right)$$
$$+ \sum_{0}^{\infty} \varphi(b-a-n)\left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{a+n}\right)$$
$$= S_a(x) - \varphi(b-a)\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{a}\right)$$
$$- \frac{1}{x+b} \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{a-b+n+1} - \frac{1}{x+a+n+1}\right) + A,$$

kde A značí veličinu na x nezávislou. Máme tak

$$S_a(x+1) - S_a(x) = -\frac{\varphi(b-a)}{x+a} + \frac{\varphi(a-b+1)}{x+b}$$
$$- \frac{\varphi(x+a+1)}{x+b} + A',$$

podobně

$$S_b(x+1) - S_b(x) = -\frac{\varphi(a-b)}{x+b} + \frac{\varphi(b-a+1)}{x+a}$$
$$- \frac{\varphi(x+b+1)}{x+a} + B',$$

a sečtením máme po redukci

$$[S_a(x+1) + S_b(x+1)] - [S_a(x) + S_b(x)] = -\frac{\varphi(x+a)}{x+b}$$
$$- \frac{\varphi(x+b)}{x+a} - \frac{1}{(x+a)(x+b)} + C,$$

kde C nezávisí na x. Vychází tak vztah

$$G(x+1) = G(x) + C.$$

Devivace

$$G'(x) = \varphi'(x+a)\,\varphi(x+b) + \varphi(x+a)\,\varphi'(x+b)$$
$$- \sum_{0}^{\infty} \frac{\varphi(b-a-n)}{(x+a+n)^2} - \sum_{0}^{\infty} \frac{\varphi(a-b-n)}{(x+b+n)^2}$$

je celistvá funkce s periodou 1; můžeme omeziti reálnou část $\xi\,(x = \xi + i\eta)$ na určitý intervall $(k \ldots k + 1)$; výraz ukazuje, že pro veliká η je pak $G'(x)$ malé, t. j. $|G'(x)|$ je pod stálou mezí, je konstantou, a ta musí býti nullou: $G'(x) = 0$.

Naše veličina $G(x)$ je tedy stálou, i nacházíme vztah

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
\varphi(x+a)\,\varphi(x+b) - \varphi(a)\,\varphi(b) \\
= \sum\limits_{0}^{\infty} \varphi(b-a-n)\left(\dfrac{1}{a+n} - \dfrac{1}{x+a+n}\right) \\
+ \sum\limits_{0}^{\infty} \varphi(a-b-n)\left(\dfrac{1}{b+n} - \dfrac{1}{x+b+n}\right).
\end{cases}
$$

Dosadíme-li sem ještě $x = 1 - b$, $\varphi(1) = 0$, vyjde

$$
\begin{aligned}
\varphi(a)\,\varphi(b) &= \sum_{0}^{\infty} \varphi(a-b-n)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+b}\right) \\
&\quad - \sum_{0}^{\infty} \varphi(b-a-n)\left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{a-b+n+1}\right).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Pišme v (I) $a + 1$ za a, $x = v - 1$, a klaďme $b = 1$:

$$
\begin{aligned}
\varphi(v)\,\varphi(v+a) &= \sum_{0}^{\infty} \varphi(-a-n)\left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{v+a+n}\right) \\
&\quad + \sum_{0}^{\infty} \varphi(a-n)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{v+n}\right);
\end{aligned} \tag{2}
$$

dosaďme hodnoty dle vzorce

$$\varphi(-a-n) = \varphi(a+n+1) + \pi \operatorname{cotg} a\pi. \text{ tedy}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(v)\,\varphi(v+a) &= \sum_{0}^{\infty} \varphi(a+n+1)\left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{v+a+n}\right) \\
&\quad + \sum_{0}^{\infty} \varphi(n+1-a)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{v+n}\right) \\
&\quad + \pi \operatorname{cotg} a\pi\,[\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)].
\end{aligned} \tag{2*}
$$

V druhé řadě odštěpme člen $n = 0$ (stává se nekonečným pro $a = 1$), a výsledek

$$
\begin{aligned}
\varphi(v)\,\varphi(v+a) &= \sum_{0}^{\infty} \varphi(a+n+1)\left(\frac{1}{a+n+1} - \frac{1}{v+a+n}\right) \\
&\quad + \sum_{1}^{\infty} \varphi(n+1-a)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{v+n}\right) \\
&\quad + \pi \operatorname{cotg} a\pi\,[\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)] \\
&\qquad + \frac{v-1}{v}\,\varphi(1-a)
\end{aligned}
$$

integrujme dle a od 0 do 1; vzhledem k identitě

$$\varphi(x) = E + D_x \log \Gamma(x)$$

vyjde

$$\varphi(v)(E + \log v) = \int_0^\infty \varphi(x+1)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+v}\right)dx$$

$$+ \sum_1^\infty (E + \log n)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{v+n}\right)$$

$$+ \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \Big\{\pi \operatorname{cotg} a\pi\, [\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)]$$

$$+ \frac{v-1}{v}\varphi(1-a)\Big\} da.$$

Tu máme

$$\int_0^{1-\varepsilon} \varphi(1-a)\, da = \int_\varepsilon^1 \varphi(x)\, dx = E - \log \Gamma(\varepsilon) = E + \log \varepsilon + \ldots,$$

takže na pravé straně přichází číslo E násobeno veličinami

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+v}\right) \text{ a } \frac{v-1}{v},$$

jichž součet je $\varphi(v)$, takže toto číslo ze vzorce vypadne.

Dále plyne integrací po částech

$$\int_0^{1-\varepsilon} [\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)]\, \pi \operatorname{cotg} a\pi\, da$$

$$= \Big/_0^{1-\varepsilon} [\varphi(v+a) - \varphi(a+1) - \varphi(v)] \log \sin a\pi$$

$$- \int_0^{1-\varepsilon} [\varphi'(a+v) - \varphi'(a+1)] \log \sin a\pi\, da.$$

Veličiny $[\varphi(v+a) - \varphi(v)] \log \sin a\pi$ a $\varphi(a+1) \log \sin a\pi$ vymizí pro $a = 0$ a zbývá jako hodnota integrálu předešlého

$$\left(\frac{1}{v} - 1\right) \log \sin \varepsilon\pi - \int_0^1 [\varphi'(a+v) - \varphi'(a+1)] \log \sin a\pi\, da,$$

s chybou nekonečně malou. Tak vychází

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(v)\log v &= \int_0^\infty\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+v}\right)\varphi(x+1)\,dx\\
&+\sum_1^\infty\log n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+v}\right)+\frac{1-v}{v}\log\pi\\
&+\int_0^1[\varphi'(x+1)-\varphi'(x+v)]\log\sin x\pi\,dx.
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

(Pokračování.)

O separaci kořenů rovnice algebraické dle reálných částí kořenů a o důkaze fundamentální věty algebry.

Napsal K. Petr.

(Dokončení.)

2. Dříve ještě než přistoupíme k vyšetření, za jakých podmínek při změně proměnné ξ se v řadě (9) mění počet změn znaménkových, vyjádříme si výrazy C_k, c_k pomocí součinitelů A_k. Nejprve lze C_k a c_k psáti v důsledku již zavedeného označení (pro $k = 1, 2, \ldots m$) ve tvaru

$$C = \begin{vmatrix} S_0, & S_1, & \ldots & S_{k-1} \\ S_1, & S_2, & \ldots & S_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k-1}, & S_k, & \ldots & S_{2k-2} \end{vmatrix},$$

$$c_k = (-1)^k \begin{vmatrix} S_{-1}, & S_0, & \ldots & S_{k-2} \\ S_0, & S_1, & \ldots & S_{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k-2}, & S_{k-1}, & \ldots & S_{2k-3} \end{vmatrix} A_{2m}$$

Čísla $S_0, S_1, \ldots$ jsou koefficienty v rozvoji podílu $h(X) : g(X)$ dle klesajících mocnin čísla X, neboť jest

$$\frac{h(X)}{g(X)} = \frac{\Theta_1}{X-\varepsilon_1} + \frac{\Theta_2}{X-\varepsilon_2} + \ldots + \frac{\Theta_m}{X-\varepsilon_m} =$$
$$= \frac{S_0}{X} + \frac{S_1}{X^2} + \frac{S_2}{X^3} + \ldots + \frac{S_k}{X^{k+1}} + \ldots$$