Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Machovec

O středech křivosti evoluty kuželosečky

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 20 (1891), No. 2, 97--101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/109228

Vyjádříme-li interval času, pro schůzku ustanovený, v minutách, mohou míti x, y všechny možné hodnoty od 0 do 60. Pravděpodobnosť žádaná

$$P = \frac{1}{60^2}\left\{\int_0^{10}\int_0^{x+10} dx\,dy + \int_{10}^{50}\int_{x-10}^{x+10} dx\,dy + \int_{50}^{60}\int_{x-10}^{60} dx\,dy\right\}$$

$$= \frac{1}{60^2}\left[\int_0^{10}(x+10)\,dx + 20\int_{10}^{50} dx + \int_{50}^{60}(70-x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1100}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

O středech křivosti evoluty kuželosečky.

Podává

F. Machovec,

professor v Karlíně.

Po vydání svého spisu „Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na zákl. nové methody“ neměl jsem v úmyslu podávati nové příspěvky k důkazu, že methoda v tomto spise vyložená stačí vždy k sestrojení tečen a středů křivosti křivky, jejíž každý bod, nechť již jeho poloha závisí na proměnlivé délce, nebo úhlu, atd. dovedeme sestrojiti, — mělť jsem tuto věc za úplně dokázanou.

Od tohoto úmyslu odvrátily mne články, které se objevují často v mathematických časopisech anebo i v samostatných spisech, články mající účel odvoditi konstrukce středů křivosti některých křivek způsobem více nebo méně geometrickým, aniž podávají obecnou methodu k řešení této úlohy. Tak příslušná stať ve Wienerově deskriptivní geometrii přiměla mne k sepsání článků o souvislosti středů křivosti dvou křivek kollinearných v bodech sdružených a o středech křivosti drah vytvořených body obrazce, který se libovolným způsobem v rovině pohybuje*) a článek, jejž uveřejnil d'Ocagne v „Nouvelles Annales de mathématiques 1888“ měl vliv na můj článek „O středech křivosti křivky integrální“ uveřejněný v loňském ročníku tohoto časop.

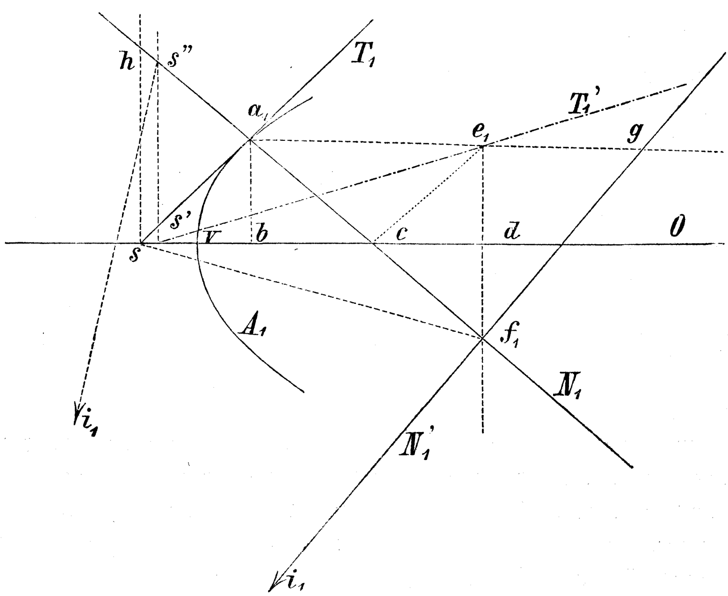
---

*) „Beiträge zur Construction der Tangenten und der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven.“ (Zpráva král. spol. nauk z r. 1888.)

V poslední době sám Mannheim uveřejnil v časopise „Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen“ (Tübingen II. B. 1889, III. B. 1890.) dva články, z nichž jeden zabývá se sestrojováním středů křivosti evoluty kuželosečky**), druhý středy křivosti křivek Cassiniho.

Pojednám v tomto článku o úloze první.

Suďme nejprve s Mannheimem takto: Je-li B libovolná kuželosečka o středu o a a a a' dva její libovolné body, dotýká se jí v těchto bodech nekonečně mnoho kuželoseček a středy jejich jsou na průměru křivky B, který prochází středem tětivy aa'. Stanou-li se body a a a' nekonečně blízkými body křivky B, přejdou ty kuželosečky v kuželosečky, které mají s křivkou B v bodě a dotyk třetího stupně a středy jejich budou na přímce oa. Mezi těmito kuželosečkami jest jediná parabola a přímka oa est jejím průměrem. Evoluta této paraboly, jakož vůbec evoluta



Obr. 1.

**) „Construire le centre de courbure de la développée d'une conique“ str. 133—135, II. B.

každé z vytčených kuželoseček, bude oskulovati evolutu kuželosečky B ve středu křivosti místa a, z čehož jde, že předložená úloha převedena jest na úlohu: sestrojiti jest středy křivosti evoluty paraboly.

Budiž a_1 libovolný bod paraboly A_1 (obr. 1.), O její osa, v vrchol, p poloparametr, $a_1 b \perp O$ a délka $vb = x$. Normála paraboly v bodě a_1 prochází bodem c, pro nějž jest $bc = p$ a střed křivosti f_1 místa a obdržíme, učiníce $cd = 2x$ a $df_1 \perp O$, nebo učiníme-li $a_1 e_1 \parallel O$ a rovno $p + 2x$ a $e_1 f_1 \perp O$. Tuto druhou konstrukci středu f_1 vezmeme za základ vyšetřování. Jest patrno, že geometrickým místem bodů e_1 příslušných ke všem bodům a_1 paraboly A_1 bude parabola E_1 mající poloparametr $\frac{p}{3}$ a vrchol ve vzdálenosti p od vrcholu v. Tečna její T'_1 v bodě e_1 bude tedy procházeti bodem s' osy O, pro nějž $ds' = -6x$.

Abychom sestrojili střed křivosti evoluty F_1 naší paraboly pro bod f_1, pokládejme parabolu A_1 za orth. průmět křivky A, jejíž tečna T v bodě a má stopu v bodě s, v němž T_1 protíná O. V bodech křivky A sestrojeny jsou normály N k její promítající ploše válcové; ty tvoří plochu sborcenou N, jejíž průmět má za konturu evolutu F_1. Body a křivky A sestrojeny jsou dále rovnoběžky s osou O. Tyto rovnoběžky tvoří plochu válcovou, na níž jest křivka E mající za průmět dříve uvedenou parabolu E_1. Poněvadž osa O jest stopou roviny tečné této plochy válcové dle přímky ae, jest bod s' stopou tečny T' křivky E v bodě e.

Křivka E jest řidící křivkou plochy válcové, jejíž povrchové přímky jsou kolmy na rovině procházející osou O kolmo k rovině průmětné. Tato plocha válcová protíná plochu N ve křivce F, jejímž průmětem jest evoluta F_1. Poněvadž přímka $s's''$, kolmá k O, jest stopou oné plochy válcové, jest bod s'', v němž tato kolmice protíná přímku N_1, stopou tečny křivky F v bodě f..

V bodech křivky F sestrojeny jsou normaly N' k její promítající ploše válcové. Tyto normály tvoří plochu sborcenou N′, jejíž průmět má za obrys evolutu křivky F_1. Rovina tečná plochy N′ procházející přímkou N' kolmo k rovině průmětné dotýká se tedy této plochy v bodě i, jehož průmět i_1 jest žádaným středem křivosti.

Plochy N dotýká se dle přímky N hyperbolický paraboloid H mající za řídící útvary tečnu T (as), přímku procházející bodem f_1 kolmo k rovině průmětné a tuto rovinu. Z toho jde, že plochy N′ bude se dotýkati dle přímky N' hyperbolický paraboloid H′, který má za řídící útvary přímku fs'' a rovinu průmětnou a jehož povrchové přímky rovnoběžné s průmětnou jsou kolmy na příslušných povrchových přímkách paraboloidu H. Poněvadž jest $f_1s'' \perp a_1s$, bude jedna z povrchových přímek tohoto paraboloidu téže soustavy jako fs'' kolma k rovině průmětné, t. j. průměty všech přímek povrchových rovnoběžných s průmětnou budou procházeti bodem, který jest patrně žádaným bodem i_1. Uvážíme-li, že přímka sf_1 jest stopou paraboloidu H na rovině průmětné, obdržíme bod i_1 jakožto průsečník kolmice z bodu s'' na tuto stopu spuštěné s normálou N_1'.

Z této konstrukce odvodíme snadno vlastnosť, kterou Mannheim ve svém pojednání dokazuje, že totiž $f_1i_1 = 3gf_1$, značí-li g průsečník přímky N_1' s průměrem a_1e_1.

Jest totiž

$$\triangle s''f_1i_1 \sim \triangle sa_1f_1,$$

tedy

$$f_1i_1 : f_1s'' = a_1f_1 : a_1s.$$

Učiníme-li $sh \perp O$, jest $a_1f_1 = hc$,

tedy

$$f_1i_1 : f_1s'' = hc : a_1s.$$

Dále jest

$$\triangle chs \sim \triangle e_1f_1g,$$

tedy

$$hc : a_1s = gf_1 : f_1c \quad (\text{nebo\v{t} } ce_1 \parallel T_1 \parallel f_1g).$$

Z obou posledních úměr vychází úměra

$$f_1i_1 : f_1s'' = gf_1 : f_1c \text{ čili } f_1i_1 : gf_1 = f_1s'' : f_1c$$

avšak

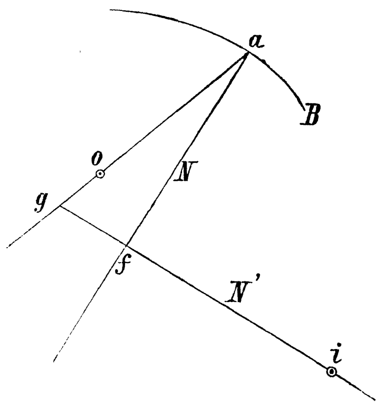
$$f_1s'' : f_1c = ds' : dc = 3 : 1,$$

tedy

$$f_1i_1 = 3gf_1,$$

což bylo dokázati.

Je-li nyní B libovolná kuželosečka (obr. 2.), o její střed a její libovolný bod, N normála v tomto bodě a f střed křivosti této křivky v bodě a, jest dle toho co z počátku bylo řečeno přímka *ao* průměrem paraboly A_1, která v bodě *a* má s křivkou *B* dotyk třetího stupně.



Obr. 2.

Dle výsledku, k němuž právě jsme dospěli, obdržíme střed křivosti *i* evoluty křivky *B* v bodě *f*, učiníme-li

$$fg \perp N \text{ a } fi = 3gf,$$

při čemž *g* značí průsečník kolmice *fg* s průměrem *ao*.

Podotýkám podle Mannheima, že úlohu, jíž tento článek se zabývá, rozřešil poprve Mac Laurin.

Pokus vysvětliti Machův klam optický.

Napsal

Jan Sommer,

professor v Roudnici.

Jest známo, že lze obrazec krychle vyložiti si dvojím způsobem, pokud není vyznačeno (tečkováním, stínováním), které hrany krychle (plné) jsou viditelny a které nikoliv.

Myslíme-li si na obr. 1. hrany FE, FB, FJ zakryté, má krychle jinou polohu, než myslíme-li si zakrytými hrany DA, DH, DC. Poprvé jest viditelna průčelná plocha ABCD, hoření ADHE a pravá DCJH; roh D jest vypuklý, roh F dutý. Nazývejme tuto polohu původní. Podruhé jest průčelnou plochou EFJH, a vedle ní jest viditelnou plocha dolení BCJF a levá